Математическая логика и теория алгоритмов

Лектор: А. Л. Семенов

Лекция 2

Оглавление

Теория множеств. Продолжение

Задача 1. Построить изоморфизм между множеством характеристических функций на x и множеством подмножеств множества x.

Задача 2. Доказать, что множество подмножеств любого множества ему не изоморфно.

Идея решения [Диагональ Кантора]. Пусть изоморфизм $G : x \to 2^x$ существует. Рассмотрим для каждого элемента y из нашего множества x соответствующее ему подмножество $G(y)$. Можем ли мы из элементов множества x собрать подмножество C, которое отличалось бы от множества $G(y)$ «на элементе y»? Или, что то же самое, как построить одну характеристическую функцию f_C, которая отличалась бы от характеристической функции множества $G(y)$ «в точке y» при всяком y?

Задача 3. Доказать, что множество действительных чисел равномощно множеству подмножеств натурального ряда.

Задача 4. Как точно описать натуральный ряд?

В математических построениях используются операции над множествами. Идя по уже начатому пути, мы должны добавлять аксиомы, гарантирующие существование результатов этих операций. Вот еще один пример:

$\forall u \exists s \forall v (\forall w (w \in v \rightarrow w \in u) \equiv v \in s)$ [Аксиома степени]

Задача 5. Проверить, что последняя формула содержательно означает существование множества всех подмножеств любого заданного множества.

Конечно, нам понадобится, например, и множество, являющееся пересечением двух данных множеств, и т. д.

Выше мы начали постепенно строить множества. Ясно, как продолжить этот путь, например, построить множество целых чисел, затем – рациональных как множество пар целых с некоторым отношением эквивалентности на нем, затем – множество действительных чисел, и т. д.

Теория множеств. Пределы расширения

Возникает естественное желание сразу рассмотреть множество всех объектов, для которых верно какое-то утверждение, назовем его Ф, построенное с использованием символов логики, принадлежности, равенства. Другими словами, нельзя ли для каждого свойства Ф(x) добавить аксиому:

$$\exists \boldsymbol{s} \forall \boldsymbol{v} (\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{s} \equiv \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v})) \text{ ?}$$

Возьмем в качестве формулы Ф(x) следующую:

$\neg(x \in x)$ [Диагональ Рассела]

Задача 6. Может ли существовать требуемое s ?
Ответ на этот вопрос – отрицательный (детально он обсуждается на упражнениях). К построению новых множеств и введению аксиом надо относиться осторожно.
В связи с идеей использования множества объектов, выделяемых некоторым свойством, заметим, что можно исправить дело, если не пытаться рассмотреть все объекты, для которых выполнено свойство, а лишь те, которые лежат в некотором множестве. Это дает такую аксиому:

$$\forall u \exists s \forall v (v \in s \equiv (v \in u \wedge \Phi(v)))$$ [Аксиома подмножества для **Ф**]

Позднее мы завершим построение всей системы аксиом математики. Эта система окажется вполне обозримой. Она умещается на одной странице, и значительную часть аксиом мы уже выписали.

Гипотеза Континуума

Как мы выяснили выше, множество действительных чисел не равномощно множеству натуральных чисел (диагональ Кантора). Существует ли бесконечное подмножество в множестве действительных чисел, которое не равномощно ни всему множеству действительных чисел, ни множеству натуральных чисел? Кантор считал, что такого множества не существует. Однако, он не опубликовал доказательства, и соответствующее утверждение под названием Гипотеза Континуума составило содержание Первой Проблемы Гильберта.

В дальнейшем выяснилось, что Гипотезу Континуума нельзя ни доказать ни опровергнуть, если принять естественную систему аксиом, относящихся к множествам.

В частности, Курт Гедель (28.04.1906 – 14.01.1978) доказал в 1940 году, что Гипотезу Континуума нельзя опровергнуть, то есть, принятие Гипотезы

Континуума не может привести к противоречию (если теория множеств без нее – не противоречива).

Пол Коэн (02.04.1934 – 23.03.2007) доказал в 1964 году, что Гипотезу Континуума нельзя доказать, если принять естественную систему аксиом о множествах.

Геометрия. Пятый постулат

Ситуация, напоминающая Проблему Континуума при построении математики на базе теории множеств, уже возникала в истории математики. В построении геометрии особую роль играл «Пятый постулат» – утверждение о том, что через точку, лежащую вне данной прямой, можно провести не более одной прямой, не пересекающейся с данной. У Евклида было сказано: «И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, [в сумме] меньшие двух прямых, то продолженные эти две прямые неограниченно встретятся с той стороны, где углы меньшие двух прямых.»

В течение столетий математики, в том числе известные, пытались доказать это утверждение, в частности, предположить, что оно неверно и вывести отсюда противоречие. В конце концов, российский математик Николай Иванович Лобачевский пришел к убеждению: если к геометрии Евклида добавить утверждение о существовании нескольких прямых, проведенных через одну точку и параллельных данной, то противоречия в ней не возникнет, и опубликовал свой труд о «неэвклидовой геометрии» (названный им «О началах геометрии») в 1829 году. К такому же результату пришел венгерский математик Янош Бо́йяи. Его результат был опубликован в книге его отца в 1832 году. Отец привлек внимание крупнейшего математика Карла Фридриха Гаусса (30.4.1777 — 23.02.1855) к этой публикации, и Гаусс сообщил ему о том, что сам пришел к тем же выводам десятилетия назад, но так их и не опубликовал. Доказательство утверждения Лобачевского было получено Феликсом Клейном (25.4.1849 — 22.6.1925) в 1871 году. Это, однако, тот случай в истории науки, когда принципиальным оказалось именно выдвижение и отстаивание гипотезы известным ученым – Николаем Лобачевским.

В нашем курсе будет рассмотрено, как развивалась ситуация уже не с геометрией, а со всей математикой, в частности с ее аксиомами, вызывающими наибольшие сомнения, с реализацией всей Программы Гильберта. Решающую роль здесь сыграли работы Курта Геделя. К его результатам мы еще много раз будем обращаться в нашем курсе.

Логика высказываний

Мы начинаем изучение первого из логических языков нашего курса – логики высказываний.

Пусть задана бесконечная последовательность A_0, A_1, A_2,… . Ее элементы будем называть именами высказываний. Определим понятие формулы логики высказываний. В нашем (индуктивном) определении будем говорить просто «формула»:

1. Логические константы 0 и 1 – формулы.
2. Если A – имя высказывания,

   то A – формула.
3. Если Φ, Ψ – формулы, τ – один из символов: $\wedge$ (и, конъюнкция), $\vee$ (или, дизъюнкция), $\rightarrow$ (следует, импликация), ≡ (эквивалентность),

   то $\neg$(Φ), (Φ τ Ψ) – формулы.

В п. 3 мы напомнили в скобках названия используемых логических символов.

То, что мы сейчас определили, называется синтаксисом, в данном случае – синтаксисом логики высказываний.

Задача 7. Как проверить, является ли слово формулой?

Например, формулы ли:

)))A_0,

((A_0,

$\wedge$ A_1)) ?

Задача 8 (однозначность анализа). Пусть Φ – формула. Тогда выполнена ровно одна из четырех возможностей:

1. Φ – логическая константа или имя высказывания,
2. существует и единственна формула Ψ такая, что

   $\Phi = \neg(\Psi)$,
3. существуют однозначно определяемые формулы Ψ, Θ

   и символ $\tau \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \equiv\}$ такие, что

   $\Phi = (\Psi\ \tau\ \Theta)$.

Определение устройства формул обычно называется синтаксисом языка. Теперь мы переходим к тому, что называется обычно семантикой – приписыванием словам смысла, значения.

Напомним, что для логических связок: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \equiv$ мы уже задали некоторый смысл – это операции над логическими константами 0, 1. Эти операции мы задаем таблицей:

A	B	¬A	A∧B	A∨B	A→B	A≡B
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

$\boldsymbol{B}^{\mathbf{N}}$ – множество бесконечных последовательностей из 0 и 1.

В нашей системе определений выбор какого-то элемента $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_i \ldots \in \boldsymbol{B}^{\mathbf{N}}$ будет означать фиксацию значений для имен высказываний $A_0, A_1, \ldots, A_i, \ldots$.

Всякий такой элемент α будем называть интерпретацией. Фиксируем *интерпретацию* α.

Значение формулы (*при данной интерпретации* α) определяется следующим образом:

1. Значением логической константы является она сама.
2. Значением логического имени A_i является α_i .
3. Значением формулы $\neg\Phi$ является отрицание значения формулы Φ, т.е. **Зн $\neg\Phi$ = 1- Зн Φ**.
4. Значением формулы **$(\Phi\tau\Psi)$,** где $\tau\in\{\rightarrow, \wedge, \vee, \equiv\}$ является результат применения операции τ к значениям формул **Φ, Ψ**.

Заметим, что структура нашего определения значения формулы полностью совпадает со структурой определения понятия формулы. Только теперь мы не определяем, что такое формула, а определяем (если угодно – вычисляем) некоторое значение индукцией по построению (то есть, следуя определению) формулы. Такой способ определения у нас будет встречаться еще неоднократно.

Попытаемся воспользоваться данным определением. Нам дана формула. Как вычислить ее значение? Если буквально следовать определению, то надо определить ее вид в соответствии с задачей 8 и если, например, она представляется в виде **$(\Phi\wedge\Psi)$**, найти значения формул Φ и Ψ, применить к ним нужную строчку в столбце таблицы для конъюнкции и получить ответ. Первый вопрос, который возникает: а как найти значения Φ и Ψ? Если какое-то из них – это 0 или 1, то понятно. Если какое-то – это имя высказывания, например, A_3 , то надо взять значение α_3. Наконец, может оказаться, что, например, формула Ф сама есть конъюнкция (или импликация, отрицание и т. д.). Тогда нам придется вычислять значение некоторой новой формулы…

Задача 9. Доказать, что поступая описанным выше образом, мы сумеем вычислить значение формулы.

Еще одно замечание. Корректно ли наше определение, действительно ли оно позволяет вычислить значение всякой формулы при заданной интерпретации? Вот, что мы имеем в виду. Мы представили формулу в виде **(**$\Phi \wedge \Psi$**)** и т. д. Но может быть, ее можно было бы представить и в другом виде, например, в виде **(**$\Phi' \to \Psi'$**)**. Тогда, продолжая наши действия, мы тоже получим некоторое значение, но, возможно, другое. Может ли так быть?

Задача 10. Показать, что значение формулы вычисляется однозначно.

Конечно, ключевым соображением в решении задачи является доказательство того, что анализ формулы, выяснение того, «откуда она взялась», дает однозначный результат на каждом шаге.

Итак, мы определили значение формулы при данной интерпретации. Мы можем теперь рассмотреть всевозможные интерпретации и сказать, что ***значение формулы*** – это функция ***B***$^{\boldsymbol{\omega}}\to$ ***B, ставящая в соответствие каждому*** α ***вышеопределенное значение.***

Значение формулы при такой формулировке – не слишком обозримый объект – это функция, определенная на бесконечных последовательностях. Однако ясно, что значение этой функции зависит только от конечного отрезка этих последовательностей. Пусть наибольший номер переменной в формуле равен n-1. Тогда формула задает функцию $B^n \to B$.

Примеры и применения. Распространенные способы рассуждения

Мы покажем сейчас, как в описанной нами логике высказываний выглядят некоторые обычно используемые в математике способы рассуждений.

Пусть при какой-то интерпретации α выполнено $\alpha \models \boldsymbol{\Phi\to\Psi}$ и $\alpha \models \boldsymbol{\Phi}$**.** Тогда, как легко видеть, $\alpha \models \boldsymbol{\Psi}$

Всюду вычеркнем α (то есть – «при всех α») и запишем:

$$\models \boldsymbol{\Phi},\ \models \boldsymbol{\Phi\to\Psi},$$

-------------- («правило вывода»)

$$\models \boldsymbol{\Psi}$$

Получили правило вывода **Modus ponens:**

если в каком-то рассуждении мы получили Φ, и $\Phi\to\Psi$, то можем получить Ψ .

Вот еще примеры:

доказательство от противного

$$\neg\Phi \models 0$$

$$\models \Phi$$

контрапозиция

$$\neg\Phi\to\neg\Psi \models \Psi\to\Phi$$

разбор случаев

- **$(\Psi\to\Phi)$, $(\neg\Psi\to\Phi)$** $\models \Phi$

доказательство эквивалентности

- **$(\Phi\to\Psi)$, $(\Psi\to\Phi)$** $\models$ **$(\Phi \equiv \Psi)$**

Теорема компактности

В наших рассмотрениях будут встречаться продуктивные параллели между математической логикой и другими областями математики. Вот один пример:

Определение. Топологическое пространство называется компактным, если из любого его покрытия открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

Теорема (Топология). Пусть дано семейство замкнутых множеств компактного пространства. Если всякое конечное подсемейство имеет непустое пересечение, то и пересечение всех множеств семейства не пусто.

Теорема (Логика). Пусть дано семейство формул логики высказываний. Если всякое его конечное подсемейство выполнимо, то и все семейство выполнимо.

Задача 11. Доказать Теоремы компактности в топологии (для множеств на прямой, например) и логике.

Итог

Итак, в **Логике высказываний** мы: строим **сложные** высказывания из **простых.** При этом:

- Для **простых** – существенна только их **истинность**.
- О чем высказывания – не существенно, и **не видно**.
- Значение сложного высказывания определяется значением его частей. В конце концов – «атомных» высказываний.