Введение в математическую логику и теорию алгоритмов

Лекция 8

Алексей Львович Семенов

Модель теории. Семантические свойства.

- $M = \langle D, \Sigma, Зн \rangle$ – структура,
  Φ – замкнутая формула,
  $M \vDash \Phi$ означает, что формула Φ *истинна в* M.
- $M \vDash \Phi(a_0, \ldots, a_k)$ означает, что Φ истинна в M, если вместо переменных x_i подставлены элементы a_i.

Структура M – *модель* теории Г, если $M \vDash \Phi$ для любой $\Phi \in Г$.

Замкнутая формула Φ *семантически следует* из теории Г, если формула Φ истинна в любой модели теории Г.

- Обозначение: $Г \vDash \Phi$.

Теории, у которых нет моделей, называются *семантически противоречивыми*.

Теория Г *семантически полна*, если для любой замкнутой формулы Φ в той же сигнатуре $Г \vDash \Phi$ или $Г \vDash \neg\Phi$.

- Будем опускать слово «семантически».

Теория равенства

- Сигнатура: имя двуместного отношения =
- Аксиомы:
- $\forall u\ (u=u)$ – рефлексивность,
- $\forall u,v\ (u=v \Rightarrow v=u)$ – симметричность,
- $\forall u,v,w\ (u=v \wedge v=w \Rightarrow u=w)$ – транзитивность.

Теории с равенством

- Теория Г называется *теорией с равенством*, если
- (1) Г содержит аксиомы теории равенства,
- (2) для каждого имени отношения P, входящего в Г, в теории Г имеется аксиома

$$\forall u_0,\ldots, u_k, v_0, \ldots, v_k$$
$$\big((u_0=v_0 \wedge \ldots \wedge u_k=v_k) \Rightarrow \big(P(u_0,\ldots,u_k) \Leftrightarrow P(v_0,\ldots,v_k)\big)\big).$$

Структура сигнатуры с равенством называется *нормальной*, если имени “=“ Зн сопоставляет совпадение предметов (обычное равенство).

Преобразование модели в нормальную

- Пусть $M = <D, \Sigma, \text{Зн}>$ – модель теории с равенством Г,
  и $R = \text{Зн}(=)$.

Пусть $M' = <D', \Sigma, \text{Зн}'>$, где

- D' – множество классов эквивалентности по R,
- $\text{Зн}'(P)(A_0, \ldots, A_k) = 1 \Leftrightarrow \text{Зн}(P)(a_0, \ldots, a_k) = 1$
  для каких-то $a_i \in A_i$.

(1) Определение корректно,

(2) M' – нормальная структура,

(3) для любой формулы $\Phi(x_\mathbf{0}, \ldots, x_\mathbf{k})$

$M' \vDash \Phi(A_\mathbf{0}, \ldots, A_\mathbf{k}) \Leftrightarrow M \vDash \Phi(a_\mathbf{0}, \ldots, a_\mathbf{k}),\ a_i \in A_i.$

Доказательство (3) – индукция по построению.

Гомоморфизмы

Гомоморфизм:

- Сигнатура, две структуры
- Отображение
- Сохранение имен предметов и отношений

Частные случаи:

- Вложение
- Изоморфизм – гомоморфизм, для которого есть обратный:
  - Взаимно-однозначное соответствие (на всё и не склеивает)
  - гомоморфизм
- Автоморфизм
  - Изоморфизм структуры с ней самой

Изоморфизм структур

- *Изоморфизм* структур

  $M_1 = \langle D_1, \Sigma, Зн_1 \rangle$ и $M_2 = \langle D_2, \Sigma, Зн_2 \rangle$

– взаимно однозначное отображение $\psi: D_1 \to D_2$:

- для любого c – имени предмета из сигнатуры Σ –

  $\psi(Зн_{\mathbf{1}}(c)) = Зн_{\mathbf{2}}(c)$,

- для любого имени отношения P из сигнатуры Σ и для любых $a_0,\ldots,a_k \in D_1$ выполнено

  $(Зн_1 P)(a_0,\ldots,a_k) = (Зн_2 P)(\psi(a_0),\ldots,\psi(a_k))$.

Структуры $M_{\mathbf{1}}$ и $M_{\mathbf{2}}$ *изоморфны*, если для них существует изоморфизм.

Пример. Структуры Q и Q^+ (положительные рациональные) изоморфны.

Теория структуры. Элементарная эквивалентность структур

- *Теория структуры* Th(M) – это множество замкнутых формул, истинных в структуре M.
- Th(M) всегда непротиворечива и полна.
- Структуры M_1 и M_2 с одной и той же сигнатурой *элементарно эквивалентны* ($M_1 \equiv M_2$), если их теории совпадают: $Th(M_1) = Th(M_2)$.
- Изоморфные структуры элементарно эквивалентны.
- Неизоморфные элементарно эквивалентные?

Вложение одной структуры в другую

Фиксируем сигнатуру.

Структура M_1 *вложима* в структуру M_2, если существует вложение ψ: $M_1 \to M_2$, иначе говоря

- $\psi(M_1)$ – *подструктура* структуры M_2.
- Пример. Структура $<N,\{<\},Зн_N>$ вложима в структуру $<Q,\{<\},Зн_Q>$.
- Подструктура M_1 структуры M_2 называется *элементарной*, если для любой формулы $\Phi(x_0,...,x_k)$ и любых элементов $a_0,...,a_k \in M_1$ выполнено

$$M_1 \vDash \Phi(a_0,...,a_k) \Leftrightarrow M_2 \vDash \Phi(a_0,...,a_k). \quad (*)$$

В этом случае структура M_2 также называется *элементарным расширением* структуры M_1.

Для атомных Φ (*) – это определение подструктуры.

- Элементарное расширение $\Rightarrow$ элементарная эквивалентность. Обратное неверно.

Критерий элементарности вложения

Подструктура M_1 структуры M_2 является элементарной тогда и только тогда, когда для любой формулы

$\Phi(x_0,\ldots,x_k,y)$ и любых элементов $a_0,\ldots,a_k \in M_1$ если

$M_2 \models \Phi(a_0,\ldots,a_k,b)$ для некоторого $b \in M_2$, то

$M_2 \models \Phi(a_0,\ldots,a_k, b')$ для некоторого $b' \in M_1$.

Доказательство.

Пусть M_2 – элементарное расширение M_1. Тогда

- $M_2 \models \Phi(a_0,\ldots,a_k,b)$ для некоторого $b \in M_2 \Rightarrow$
- $M_2 \models (\exists u\, \Phi(a_0,\ldots,a_k, u) \Rightarrow$
- $M_1 \models (\exists u\, \Phi(a_0,\ldots,a_k, u) \Rightarrow$
- $M_1 \models \Phi(a_0,\ldots,a_k, b')$ для некоторого $b' \in M_1 \Rightarrow$
- $M_2 \models \Phi(a_0,\ldots,a_k, b')$.

Критерий элементарности подструктуры

- Пусть условие критерия выполнено. Мы должны показать, что
- $M_1 \models \Phi(a_0,...,a_k) \iff M_2 \models \Phi(a_0,...,a_k)$

  для любой формулы Φ и для любых $a_0,...,a_k \in M_1$.
- Индукция по построению формулы. Для атомных формул очевидно.
- Если формула не начинается с квантора, то применяется индукция и критерий не используется.
- Достаточно рассмотреть случай
- $\Phi = (\exists u\ \Psi(x_0,...,x_k,u))$, поскольку случай
- $\Phi = (\forall u\ \Psi(x_0,...,x_k,u))$ сводится к
- $M_1 \not\models (\exists u\ \neg\Psi(a_0,...,a_k,u)) \iff M_2 \not\models (\exists u\ \neg\Psi(a_0,...,a_k,u))$.

Критерий элементарности подструктуры

- Пусть $M_1 \models (\exists u\ \Psi(a_0,...,a_k,u))$.
- Тогда $M_1 \models \Psi(a_0,...,a_k,b')$ для некоторого $b' \in M_1 \Rightarrow$ **(индукция)**
- $M_2 \models \Psi(a_0,...,a_k,b') \quad \Rightarrow \quad M_2 \models (\exists u\ \Psi(a_0,...,a_k,u))$

(мы не использовали условий критерия).

- Пусть $M_2 \models (\exists u\ \Psi(a_0,...,a_k,u))$.
- Тогда $M_2 \models \Psi(a_0,...,a_k,b)$ для некоторого $b \in M_2 \Rightarrow$ **(условие)**
- $M_2 \models \Psi(a_0,...,a_k,b')$ для некоторого $b' \in M_1 \Rightarrow$ **(индукция)**
- $M_1 \models \Psi(a_0,...,a_k,b') \quad \Rightarrow \quad M_1 \models (\exists u\ \Psi(a_0,...,a_k,u))$.

Теорема Лёвенгейма – Сколема об элементарной подструктуре

Т. Пусть M – бесконечная структура с конечной или счетной сигнатурой. Тогда M содержит счетную элементарную подструктуру.

Доказательство.

Строим последовательность $M_0 \subset M_1 \subset \ldots$ счётных подструктур M.

- M_0 – множество значений имен предметов.

Пусть $M_{\mathbf{i}}$ уже построено.

- Построение M_{i+1}: для каждой формулы $\Phi(x_0,\ldots,x_k,y)$ и для всех $a_1,\ldots,a_k \in M_i$, если $M \vDash \Phi(a_0,\ldots,a_k,b)$ для некоторого $b \in M$, добавляем в M_{i+1} один такой b.

- В силу критерия $\cup M_i$ будет элементарной подструктурой.
- $\bigcup M_i$ – счетно.

Теория линейного порядка

Γ_0 – обозначение теории линейного порядка.

Сигнатура: имя двуместного отношения "<“.

Аксиомы:

- $\forall u \neg (u < u)$ – антирефлексивность,
- $\forall u,v,w\ ((u<v \wedge v<w) \Rightarrow u<w)$ - транзитивность,
- $\forall u,v\ (u<v \vee v<u \vee u=v)$ – линейность.

Следствие из аксиом:

- $\forall u,v \neg(u<v \wedge v<u)$ – антисимметричность.

Теория плотного неограниченного линейного порядка

Γ_1 – обозначение теории плотного неограниченного линейного порядка. Определение:

Сигнатура: имя двуместного отношения "<“.

Аксиомы:

- Γ_0 ,
- $\forall u,v\ (u<v \Rightarrow (\exists w\ (u<w \wedge w<v)))$ – плотность,
- $\forall u\ (\exists v,w\ (v<u \wedge u<w))$ – неограниченность.

Полнота теории плотного неограниченного линейного порядка

Теорема. Теория Γ_1 полна.

Доказательство.

(1) Все модели теории Γ_1 бесконечны.

(2) Любые две счетные модели изоморфны.

(3) Если φ – замкнутая формула и теория $\Gamma_1 \cup \{\varphi\}$ непротиворечива, то имеется счётная модель этой теории.

•Пункт (1) очевиден, пункт (2) доказывается «челночным перечислением» – всё, что необходимо для построения изоморфизма, гарантируется аксиомами Γ_1,

пункт (3) – теорема Лёвенгейма – Сколема.

•Если Γ_1 не полна, то найдутся счётные модели для $\Gamma_1 \cup \{\varphi\}$ и $\Gamma_1 \cup \{\neg \varphi\}$ для некоторой замкнутой формулы φ.

Эти модели изоморфны. Противоречие.

Теорема Лёвенгейма – Сколема об элементарном расширении.

- **Теорема.** Для любой бесконечной структуры с конечной или счётной сигнатурой существует элементарное расширение сколь угодно большой мощности.
- **Доказательство.** Расширяем структуру.
- M = <D, Σ, Зн>, сигнатура $\Sigma_{\mathbf{M}}$ содержит имена для всех элементов из D, сопоставление Зн естественно продолжено до Зн'. $\mathrm{Th}_{\mathbf{M}}(\mathrm{M})$ – теория соответствующей структуры, M элементарно вложима в модели этой теории.
- Новые имена предметов $\{c_i\}$ – произвольной мощности, $\Gamma = \mathrm{Th}_{\mathbf{M}}(\mathrm{M}) \cup \{c_i \neq c_j\}$.
- Г непротиворечива (компактность).
- Мощность модели Г не меньше мощности множества новых имен.

Категоричность теории

Теория называется *категоричной* в данной мощности, если все её модели этой мощности изоморфны.

Признак Лося – Воота.

Непротиворечивая теория с конечной или счётной сигнатурой, не имеющая конечных моделей и категоричная в некоторой бесконечной мощности, полна.

Д. Пусть теория Г неполна, тогда для некоторой замкнутой формулы φ найдутся счётные модели для $\Gamma_1 \cup \{\varphi\}$ и $\Gamma_1 \cup \{\neg \varphi\}$.

По теореме Лёвенгейма – Сколема об элементарном расширении мы можем «поднять» эти модели до той бесконечной мощности, где Г – категорична. Противоречие.

Теория моделей. Соответствие: Теория класса структур – Класс всех моделей теории

Пусть

- m – класс структур,
- φ – теория.

Определим отображения:

- Th (m) – теория класса структур m,
- Mod (φ) – класс всех моделей теории φ.

Тогда m $\subseteq$ Mod (φ) $\Leftrightarrow$ Th (m) $\supseteq$ φ.

То есть:

Th, Mod – соответствие Галуа (анти-монотонное).

Арифметики

- Сигнатура – < 0, 1, <, +, x >
- Семантика – N, Зн, . . .
- Структура Nat – арифметика
- Th (Nat) – тоже арифметика

Добавим к сигнатуре новое имя предмета *c.*

Теория Th(Nat) $\cup$ {*c*≠0, *c*≠1, *c*≠1+1, *c*≠1+1+1,…} – непротиворечива.

Д. Любая конечная часть этой теории – непротиворечива. (Ее модель – арифметика, а интерпретация *c* – какое-нибудь достаточно большое число.) По теореме компактности есть модель и у всей теории.

Модель новой теории не изоморфна арифметике, т. к.

в арифметике нет бесконечно больших (больших, чем любая сумма единиц) элементов.

- Модели Th (Nat), не изоморфные Nat, называются *нестандартными арифметиками*.

Нестандартные арифметики, как упорядоченные множества

- На нестандартной арифметике имеется порядок <, обладающий теми же свойствами (записываемыми утверждениями логики отношений), что и порядок на Nat.
- Будем через $\underline{i}$ обозначать результат сложения *i* единиц: 1+1+…+1.

Для натуральных *n* (в Nat):

- К *n* можно добавить 1, получится большее число.
- Если *n* не ноль, из него можно вычесть 1, получится меньшее число.
- Между *n* и *n+1* нет чисел.

Отсюда: в нестандартной арифметике, если $b > a$,
то или $b = a+\underline{i}$ для некоторого i,
или $b - \underline{k} > a+\underline{i}$ для всех $\underline{i}$, $\underline{k}$.

Нестандартные арифметики

Область нестандартной арифметики разбивается на классы – галактики:

1. Каждая галактика состоит из элементов, отличающихся друг от друга добавлением и вычитанием единиц.
2. Галактика, содержащая 0, как упорядоченное множество изоморфна N. Каждая другая галактика как упорядоченное множество изоморфна целым числам Z.
3. На галактиках есть линейный порядок, изоморфный неотрицательным рациональным числам. Галактика натуральных чисел – наименьшая.

Д (3). Пусть a и b лежат в разных галактиках, $a < b$. Тогда один из элементов $a+b$ и $a+b+1$ четен, разделим его пополам. Получим элемент, лежащий между a и b. Он не может лежать в галактиках, в которых лежат a и b, иначе a, b лежали бы в одной галактике. Поэтому порядок на галактиках плотный. Наибольшего элемента нет, поскольку, если $c>i$ для всякого натурального i, то $c+c > c+\underline{k}$ для всякого натурального k.

- Операции на линейных порядках (линейно упорядоченных множествах):

  + второй порядок следует за первым,

  x располагаем копии первого порядка по второму порядку (сравниваем пары по второй координате, при равных – по первой).

- Мы выяснили, что порядок счетной нестандартной арифметики изоморфен $N^* = N + Z \times Q$.

Теории упорядоченных множеств

- Теория всех линейно упорядоченных множеств не полна.
  - В одних моделях есть наименьший элемент, в других – нет. Утверждение о существовании наименьшего элемента и его отрицание (семантически) не следуют из Γ_0.

Теория дискретного линейного порядка с наименьшим элементом без наибольшего

Γ_2 – обозначение теории дискретного линейного порядка с наименьшим элементом без наибольшего.

- Сигнатура: имя двуместного отношения <, имя константы 0.

Аксиомы:

- Γ_0 (линейный порядок),
- $\forall u\ (u=0 \lor 0<u)$, (0 – наименьший эл.)
- $\forall u\ (\exists v\ (u<v \land (\forall w\ (u<w \Rightarrow v=w \lor v<w))))$, (v – след. за u)
- $\forall u\ (u \neq 0 \Rightarrow (\exists v(v<u \land (\forall w\ (w<u \Rightarrow w=v \lor w<v)))))$.

(v – предшествующий u)

(Здесь $\neq$ – сокращение для $\neg\ldots=\ldots$)

Теория дискретного линейного порядка с наименьшим элементом без наибольшего (Γ_2)

- У Γ_2 есть счетные неизоморфные модели, например, N и N+Z.
- Эти модели представляют собой N, за которым следуют линейно упорядоченные галактики.
- Отсюда вытекает, что все счетные модели Γ_2 вкладываются в N* = N + Z x Q, причем галактики модели целиком переходят в галактики N*, а начальной галактике модели соответствуют натуральные числа в N*.
- Автоморфизмы для Z – прибавление или вычитание фиксированного числа, для N* = N + Z x Q– можно действовать аналогично в отдельных экземплярах Z – это автоморфизмы.

- Пусть M $\vDash \Gamma_2$. Тогда вложение M в N* элементарно (то есть сохраняет истинность всех формул (в сигнатуре порядка) на элементах из M).

Д. Используем критерий элементарности вложения. Дана формула Ф(*a,y*), если найдется *b*, для которого Ф(*a,b*) – истинна, то *b* найдется в M. N* – нестандартная арифметика. Для натуральных чисел верно, что при любых *x* найдется минимальное *y*, при котором Ф(*x,y*) истинна. Значит, соответствующая формула истинна и в N*. У N* есть автоморфизм, тождественный на M и вычитающий 1 во всех галактиках не из M. Этот автоморфизм оставляет на месте *a*, сохраняет истинность Ф(*a,b*). Поэтому минимальное b, при котором Ф(*a,b*) истинна, лежит в M. Элементарная экв. доказана.

- Таким образом, все счетные модели Γ_2 элементарно эквивалентны N*. Доказана:

Т. Теория Γ_2 – полна и не категорична в счетной мощности.