Введение в математическую логику и теорию алгоритмов

Лекция 7

Алексей Львович Семенов

Теория (система аксиом). Истинность в структуре.

- Фиксируем сигнатуру Σ.
- Множество замкнутых формул мы называем *теорией* или *системой аксиом*.
- Структура M называется *моделью* теории Г, если все формулы из Г в ней истинны.
- Мы будем пытаться построить модель для теории!

Построение модели

Фиксируем сигнатуру Σ.

Будем рассматривать формулы без равенства.

Усложним понятия модели. Будем рассматривать пары множеств замкнутых формул $< A^+, A^- >$,

A^+ – положительное множество, положительные ф-лы,
A^- – отрицательное множество, отрицательные ф-лы

(нам нужно будет следить не только за истинными, но и за ложными формулами).

Структура M называется *моделью* пары $< A^+, A^- >$, если в M все формулы из A^+ истинны, а все формулы из A^- ложны.

Если множества пары пересекаются, то моделей у пары нет.

Строим дерево, вершины v – пары $< A^{+}_{v}, A^{-}_{v} >$.

По ходу построения множество имен предметов в сигнатуре будет расширяться. Новые имена – из фиксированного счетного алфавита имен С.

- Сопоставим каждому натуральному числу n замкнутую формулу F_n в сигнатуре $\Sigma' = \Sigma \cup C$ так, чтобы для любой замкнутой формулы F в сигнатуре Σ' множество $\{i \mid F = F_i\}$ было бесконечным.
- Идея: «разбираем» формулы из A^{+}_{v} , A^{-}_{v} и получаем «более простые». Для каждой более простой формулы строим своего потомка в дереве.
- Одно из множеств потомка (положительное или отрицательное) совпадает с соответствующим множеством родителя, другое может увеличиться.
- Содержательно: истинность положительных и ложность отрицательных формул определяется значением формул из их потомков. Мы накапливаем информацию для модели по пути.

Продолжаем дерево в вершине $v = < A^+_v , A^-_v >$

Пусть положительное множество пересекается с отрицательным. (Содержательно: зашли в тупик.)

- Вершина v становится листом дерева – 0 потомков, продолжить нельзя.

Пусть множества в паре не пересекаются.

- Пусть n – расстояние от вершины v до корня. Выбираем формулу $F \in A^+_v \cup A^-_v$ так:

Роль F_n ?

  – если $F_n \in A^+_v \cup A^-_v$, то $F = F_n$,

  – в противном случае в качестве F возьмем формулу из $A^+_v \cup A^-_v$ с наименьшим номером.

Потомки в зависимости от формулы *F*

Атомная формула. Потомок один – та же пара.

Положительная дизъюнкция. Два потомка:

- Для каждого члена дизъюнкции – своя вершина.
- Добавляем в положительное множество этот член.

Отрицательная конъюнкция. Два потомка:

- Для каждого члена конъюнкции – своя вершина.
- Добавляем в отрицательное множество этот член.

Во всех остальных случаях потомок один.

- **Отрицание формулы** Ф – саму формулу Ф добавляем в «противоположное» множество.
- **Отрицательная дизъюнкция** – помещаем в отрицательное множество оба ее члена.
- **Положительная конъюнкция** – помещаем в положительное множество оба ее члена.

Потомки в зависимости от формулы *F*

- **$F = \forall u\, \Phi[x/u]$ и F из положительного множества.**
  В положительное множество добавляем формулы $\Phi[c/u]$ для всех имен *c*, которые входят в формулы данной вершины.
- **$F = \exists u\, \Phi[x/u]$ и F из отрицательного множества.**
  В отрицательное множество добавляем формулы $\Phi[c/u]$ для всех имен *c*, которые входят в формулы данной вершины.
- **$F = \exists u\, \Phi[x/u]$ и F из положительного множества.**
  В положительное множество добавляем «пример» $\Phi[c/u]$, где *c* – константа из *C*, которой нет в формулах данной вершины.
- **$F = \forall u\, \Phi[x/u]$ и F из отрицательного множества.**
  В отрицательное множество добавляем «контрпример» $\Phi[c/u]$, где *c* – константа из *C*, которой нет в формулах данной вершины.

Последовательность деревьев (растущее дерево)

Строим последовательность. Выбираем из непересекающихся пар наименьшую по («лексикографическому») порядку. Добавляем потомков.

- Расширяющаяся последовательность деревьев.

Когда она бесконечна?

Последовательность деревьев (растущее дерево)

- Пара $< A^+, A^- >$ конечно совместна, если любая пара $< B^+, B^- >$, где B^+ и B^- – конечные подмножества A^+ и A^-, имеет модель.

Лемма. Если в некотором листе v дерева пара $< A^+_v, A^-_v >$ конечно совместна, то у одного из потомков v в дереве соответствующая пара тоже конечно совместна.

Д. Прямая проверка. Конечные подмножества потомков, откуда они? Берем конечные подмножества в предке, включающие всё для потомков. Берем модель для этих подмножеств в предке. Выбираем нужного потомка, с учетом того, из какой формулы потомки получились. В случае квантора имя предмета интерпретируем как надо…

Сл. Если пара $< A^+;A^- >$ конечно совместна, то последовательность деревьев бесконечна.

Основная лемма. Если последовательность деревьев, соответствующая паре множеств $< A^+$**,** $A^- >$, бесконечна, то пара $< A^+$**,** $A^- >$ имеет модель.

- **Д.**
- **Лемма Кёнига.** В бесконечном дереве с конечным ветвлением есть бесконечный путь.
- Рассмотрим дерево с конченым ветвлением = объединение всех деревьев последовательности. По лемме Кёнига в нем есть бесконечный путь $v_0 < v_1 < \ldots$.
- Положим $A^+_* = \cup\{A^+_{v_i}\}$, $A^-_* = \cup\{A^-_{v_i}\}$.

Построение модели

- Определим структуру M так, что носителем M являются имена предметов из $A^+_* \cup A^-_*$, атомная формула истинна в M, если она принадлежит A^+_*. Индукцией по построению формулы докажем, что
- если формула принадлежит A^+_* , то она истинна в M, если формула принадлежит A^-_* , то ложна.
- Очевидно для всех случаев, кроме $(\forall u\, F(u)) \in A^+_*$ и $(\exists u\, F(u)) \in A^-_*$.
- Пусть $(\forall u\, F(u)) \in A^+$ и $c \in M$. Символ c встречается в некоторой вершине v_i, наше правило выбора формулы гарантирует, что $(\forall u\, F(u)) = F_{v_j}$ для некоторого j, такого, что $v_j > v_i$, то есть $F(c) \in A^+$. Значит $F(c)$ - истинна (по инд. предп.)

Основные теоремы логики отношений

Теорема компактности для счетного множества формул. Если пара множеств $< A^+, A^- >$ конечно совместна, то она имеет модель.

Общезначимые формулы – формулы, истинные в любой структуре (данной сигнатуры).

Т. Множество общезначимых формул перечислимо.

Доказательство.

Формула F общезначима, если пара $< \varnothing, \{F\} >$ не имеет модели. Если модели нет, то последовательность конечна.

• Наш процесс построения цепочки гарантирует, что конечность цепочки будет выяснена на конечном шаге, то есть свойство общезначимости вычислимо.

Как может выглядеть исчисление?

- В модальной логике – явно построено исчисление.
- Что в логике отношений?
- Опишем исчисление.

Частные случаи тавтологий логики высказываний в логике отношений

- Возьмем тавтологию логики высказываний, например:
  $A_1 \to (A_2 \to A_1)$.   (*)
- Подставим в (*) вместо логических переменных A_1 и A_2 любые (замкнутые или незамкнутые) формулы логики отношений:
- Например, вместо A_1 подставим $(\forall u_1(P_5(u_1)))$,
  а вместо A_2 подставим $(\exists u_1(P_4(u_1,u_1)))$:
  $(\forall u_1(P_5(u_1))) \to ((\exists u_1(P_4(u_1,u_1))) \to (\forall u_1(P_5(u_1))))$.
- То, что получилось, называется *частным случаем тавтологии* (*) логики высказываний в логике отношений.
- Любая такая формула общезначима (истинна в любой структуре и в любой интерпретации).
- Иногда вместо «частный случай тавтологии…» мы будем говорить просто «тавтология».

Исчисление логики отношений

- Фиксируем сигнатуру $\Sigma = <Ob, Pr>$.
- Исчисление (одно для данной сигнатуры) задаётся *аксиомами* (являющимися некоторыми формулами сигнатуры Σ) и *правилами вывода*. Правило окончания – тривиальное – все допускается.
- Вот аксиомы и правило (мы опускаем восстановимые скобки):
- **Аксиомы**:

  А1. частные случаи тавтологий логики высказываний,

  А2. формулы вида $\forall u\, \Phi[x/u] \to \Phi[x/t\,]$,

  А3. формулы вида $\Phi[x/t\,] \to \exists u\, \Phi[x/u]$,

  где Φ – формула, x – свободная переменная ($x \in FVar$), u – связанная переменная ($u \in BVar$), не входящая в Φ, t – терм.

Исчисление логики отношений

Правила вывода:

R1 $$\frac{\Phi, \quad \Phi \to \Psi}{\Psi}$$ (modus ponens, (MP))

R2 $$\frac{\Phi \to \Psi}{\Phi \to \forall u\, \Psi[x/u]}$$

R3 $$\frac{\Psi \to \Phi}{\exists u\, \Psi[x/u] \to \Phi}$$

В R2, R3 x не входит в Φ.

Если уже выведены формулы, написанные в верхней части правила, то правило разрешает вывести формулу, написанную внизу.

Правила R2 и R3 называются правилами Бернайса.

Примеры выводов

Пример 1. (1) $\vdash \forall u\, P(u) \to P(x)$ (аксиома A2)

(2) $\vdash \forall u\, P(u) \to \forall v\, P(v)$ (по правилу R2 из (1))

(В этом выводе P – имя одноместного отношения.)

Пример 2. Пусть Φ - любая конкретная формула в нашей сигнатуре.

(1) $\vdash (\forall u\, \Phi[x/u] \to \Phi) \to ((\Phi \to \exists u\, \Phi[x/u]) \to (\forall u\, \Phi[x/u] \to \exists u\, \Phi[x/u]))$

(частный случай тавтологии $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$)

(2) $\vdash \forall u\, \Phi[x/u] \to \Phi$ (A2, Φ – это $\Phi[\, x/x\,]$)

(3) $\vdash \big(\Phi \to \exists u\, \Phi[x/u]\big) \to \big(\forall u\, \Phi[x/u] \to \exists u\, \Phi[x/u]\big)$

(по MP из (2) и (1))

(4) $\vdash \Phi \to \exists u\, \Phi[x/u]$ (A3)

(5) $\vdash \forall u\, \Phi[x/u] \to \exists u\, \Phi[x/u]$ (по MP из (4) и (3))

Примеры вывода

Пример 3.

(1) $\vdash \forall u\,(u<y) \to (x<y)$ (A2, терм $t = x$)

(2) $\vdash x<y \to \exists v\,(x<v)$ (A3, терм $t = y$)

(3) $\vdash \big(\forall u\,(u<y) \to x<y\big) \to$

$\to \Big(\big(x<y \to \exists v\,(x<v)\big) \to \big(\forall u\,(u<y) \to \exists v\,(x<v)\big)\Big)$ (частный случай тавтологии $(A \to B) \to \big((B \to C) \to (A \to C)\big)$)

(4) $\vdash (x<y \to \exists v\,(x<v)) \to (\forall u\,(u<y) \to \exists v\,(x<v))$ (по MP из (1) и (3))

(5) $\vdash \forall u\,(u<y) \to \exists v\,(x<v)$ (по MP из (2) и (4))

(6) $\vdash \forall u\,(u<y) \to \forall u\,\exists v\,(u<v)$ (по R2 из (5))

(7) $\vdash \exists v\,\forall u\,(u<v) \to \forall u\,\exists v\,(u<v)$ (по R3 из (6))

Заметим, что полученная формула – общезначима.

Истинность выводимого

Теорема об истинности выводимого. Всякая выводимая формула является общезначимой.

Структура доказательства (индукция по построению)

- A1 Частные случаи тавтологий логики высказываний – общезначимы.
- A2 Формулы вида $\forall u\, \Phi[x/u] \to \Phi[\,x/t\,]$ – общезначимы.
- A3 Формулы вида $\Phi[\,x/t\,] \to \exists u\, \Phi[x/u]$ – общезначимы.
- R1 Если формулы Φ и $\Phi \to \Psi$ общезначимы, то формула Ψ – общезначима.
- R2 Если формула $\Phi \to \Psi$ общезначима и Φ не содержит x, то формула $\Phi \to \forall u\, \Psi[x/u]$ – общезначима.
- R3 Если формула $\Psi \to \Phi$ общезначима и Φ не содержит x, то формула $\exists u\, \Psi[x/u] \to \Phi$ – общезначима.

Доказательство рассматривает определение истинности, значения на последовательности и т. д.

Выводимость истинного

- **Теорема Гёделя о полноте.** Общезначимость в логике отношений совпадает с выводимостью в исчислении логики отношений.