Введение в математическую логику и теорию алгоритмов

Алексей Львович Семенов

Модальная логика (повторение)

Синтаксис (повторение)

Новая связка:

$\Box$ - необходимо.

Индуктивное построение формулы:

- Имя – формула.
- Если Φ, Ψ - формулы, $\tau \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \equiv\}$,

то $(\neg\Phi)$, $(\Box\,\Phi)$, $(\Phi\ \tau\ \Psi)$ – формулы.

Исчисление K (Крипке)

Правила вывода (правило создания):

- Тавтологии – выводимы.
- Все формулы $(\Box(A \to B)) \to (\Box A \to \Box B)$
  - выводимы.
- Если A – выводима, то
  - $\Box A$ – выводима (необходимость),
  - подстановка в A формул вместо имен – выводима (подстановка).
- Если A ; $A \to B$ – выводимы, то
  B – выводима (modus ponens – MP).

Правило окончания – тривиальное.

Истинность формул, выводимых в K

- Любая выводимая формула истинна в любой шкале.
- **Индукция по определению выводимости,** используя **Свойства семантики**

Модальная логика

Свойства семантики (повторение)

для любых *F; A; B*.

1. Подстановка формул вместо имен сохраняет истинность (очевидно).
2. $F \vDash (\Box(A \to B)) \to (\Box A \to \Box B)$.
3. Если $F \vDash A$, то $F \vDash \Box A$.
4. Если $F \vDash A$ и $F \vDash A \to B$, то $F \vDash B$.

Истинность выводимого

тавтологии - очевидно

Выводимость

$K \vdash \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

Если $K \vdash A$, то

$K \vdash \Box A$.

Подстановка в A формул вместо имен – выводима.

Если $K \vdash A$; $K \vdash A \to B$, то

$K \vdash B$.

Истинность

$F \vDash \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

Если $F \vDash A$, то

$F \vDash \Box A$.

Подстановка в А формул вместо имен – истинна.

Если $F \vDash A$ и $F \vDash A \to B$, то

$F \vDash B$.

Несколько общих определений и утверждений, полезных в контексте шире модальной логики

Противоречивые множества формул

- Формула называется противоречием, если выводимо ее отрицание.
- Множество формул называется противоречивым, если конъюнкция каких-то формул из нее – противоречие.

Лемма о противоречивой конъюнкции

Если A – противоречие, то $A \wedge B$ – противоречие.

Д. $\neg p \to \neg(p \wedge q)$ – тавтология. Значит, если в ***K*** выводима посылка, по MP в ***K*** выводимо заключение.

Лемма о противоречии

$K \vdash \neg(B_0 \wedge \ldots \wedge B_n \wedge \neg A) \quad \Leftrightarrow \quad K \vdash B_0 \to (B_1 \to (\ldots(B_n \to A)\ldots))$

Д. Пусть формулы A, B_i - имена. Каждая из формул ложна, только если все B_i истинны, а A ложно.

- Обе импликации между формулами – тавтологии, следовательно – выводимы.
- Для любых A, B_i из выводимости одной из формул по MP следует выводимость другой.

Следствие: противоречивость $\{ B_0, \ldots , B_n, \neg A\}$ эквивалентна $K \vdash B_0 \to (B_1 \to (\ldots(B_n \to A)\ldots))$ и, аналогично, $K \vdash \wedge B_\mathrm{i} \to A$.

Выводимость из множества формул

Формула A *выводима* из множества D, если

$K \vdash \wedge B_i \rightarrow A$ для некоторого (конечного) множества формул B_i из D.

Множество *D замкнуто*, если оно содержит все выводимые из него формулы.

Полные множества формул

Непротиворечивое множество формул называется *полным*, если для каждой формулы оно содержит или эту формулу, или ее отрицание.

Лемма. Полное множество замкнуто.

Пусть D – полное, $K \vdash \wedge B_\mathrm{i} \rightarrow A$,

$\{ B_0 , \dots , B_n , \neg A\}$ – противоречиво.

С другой стороны, если D не содержит A, значит D содержит $\neg A$,

D содержит противоречивое множество.

Лемма о полном расширении

Л. Всякое непротиворечивое множество можно расширить до полного непротиворечивого.

Д. Перебираем все формулы пытаясь добавить или формулу, или ее отрицание.

- Предположим, что это невозможно:

B – конъюнкция всех формул, которые входят в противоречия для A и $\neg A$. Тогда по лемме о противоречивой конъюнкции

$$K \vdash B \to A,\ B \to \neg A.$$

Лемма о полном расширении

- Подстановка в тавтологию

$K \vdash (B \to A) \to ((B \to \neg A) \to \neg B)$.

- Значит по МР
- $K \vdash ((B \to \neg A) \to \neg B)$.
- $K \vdash \neg B$.
- Таким образом, уже B было противоречием.

Объединение всех полученных множеств является расширением, полно и непротиворечиво – противоречие требует конечного числа элементов.

Общее замечание

Сформулированные последние определения и утверждения могут быть использованы в намного более широком классе случаев, чем модальная логика, и мы к ним будем прибегать и в дальнейшем.

Выводимость истинного

Несколько предварительных построений.

Мы будем интересоваться истинностью в некоторой специальной шкале.

Каноническая шкала $M^K = (S^K;R^K)$.

• Элементы S^K – все полные непротиворечивые множества формул.

Выводимость у нас «запрятана» внутрь миров.

• $R^K(s;\, t) \Leftrightarrow \{A \mid \Box A \in s\} \subseteq t$.
• Интерпретация $V^K(p) = \{s \mid p \in s\}$.

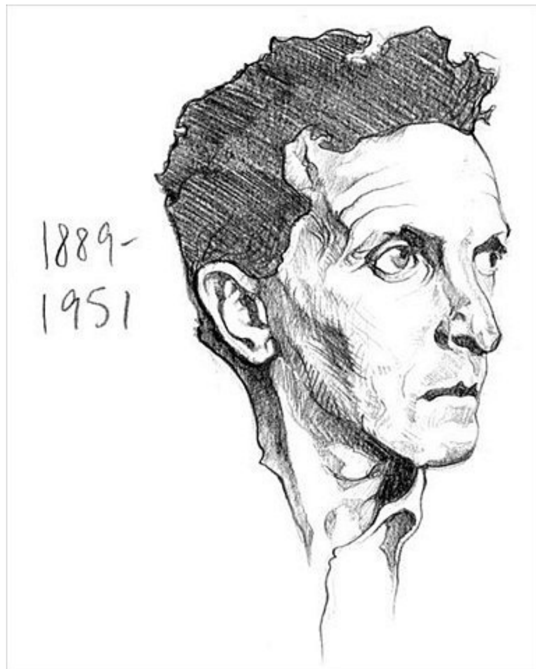
Семантику мы определяем через отношение $\in$.

Для имен мы определили истинность в мире,

как принадлежность ему.

Мир – есть совокупность фактов о нем.

Людвиг Витгенштейн (26.04.1889 — 29.04.1951)



Утверждение 1.
Для любого мира $s \in S^K$ и формулы A

$\Box A \in s \iff (A \in t$ для всех t, для которых $R^K(s; t))$.

То есть, действительно, принадлежность $\in$ продолжает играть роль истинности, в этом утверждении – для $\Box$.

Доказательство. ($\Rightarrow$)

Пусть $\Box A \in s$ и для t выполнено $R^K(s; t)$.

По определению
$R^K(s; t) \iff \{A \mid \Box A \in s\} \subseteq t$.

Значит, $A \in t$.

Утверждение 1.
Для любого мира $s \in S^K$ и формулы A

$\Box A \in s \iff (A \in t$ для всех t, для которых $R^K(s; t))$.

Доказательство. $(\Leftarrow)$

Пусть $u = \{B \mid \Box B \in s\}$. Тогда $u \cup \{\neg A\}$ противоречиво.

- Иначе расширим $u \cup \{\neg A\}$ до t из $\boldsymbol{S^K}$. $u \subseteq t$, t достижимо из s (опр. $\boldsymbol{R^K}$). Значит, $A \in t$. Противоречие.
- По Сл. Л. о противоречии, в u есть $B_0, \ldots, B_n$, для которых $K \vdash B_0 \to (B_1 \to (\ldots(B_n \to A)\ldots))$.
  $K \vdash \Box\, (B_0 \to (B_1 \to (\ldots(B_n \to A)\ldots)))$ (необходимость).

Используя аксиому $\Box(B \to A) \to (\Box B \to \Box A)$ и (MP), получаем $K \vdash (\Box B_0 \to (\Box B_1 \to (\ldots(\Box B_n \to \Box A)\ldots)$.

- Поскольку $\Box B_0, \Box B_1, \ldots, \Box B_n \in s$ и s замкнуто относительно MP, то $\Box A \in s$.

Утверждение 2.
Для любого мира $s \in S^K$ и формулы A

$$M^K, s, V^K \models A \iff A \in s.$$

Здесь мы получаем совпадение $\models$ и $\in$ уже для всех формул.

Д. Индукция по построению формулы.

Для атомных формул – определение V^K:
Истинность $p \iff s \in V^K(p) = \{s \mid p \in s\} \iff p \in s$.

Для связок логики высказываний получается с использованием полноты s и замкнутости s относительно МР:

• Истинность $\neg A$ эквивалентна не-истинности A (опр 3н), эквивалентна не-принадлежности A к s (инд предп), эквивалентна принадлежности $\neg A$ к s (полн).
• Истинность импликации означает ложность посылки или истинность заключения…
• И т. д.
Для $\Box$ – Утверждение 1.

Утверждение 3. $M^K \vDash A \iff K \vdash A$.

Д. Пусть A – истинна.

Если A не выводима, то множество $\{\neg A\}$ – не противоречиво ($K \vdash (\neg\neg A \to A)$), и его можно

расширить до некоторого s, не содержащего A. Противоречие с Утверждением 2 и истинностью A.

Противоположная импликация – это Истинность выводимого.

Теорема полноты для К. **Формула *A* выводима в Исчислении *K* тогда и только тогда, когда она истинна в любой шкале Крипке.**

Логики, определяемые классами шкал

- Для каждого класса шкал можно рассмотреть класс формул, истинных во всех этих шкалах. Этот класс формул определяется заданным классом шкал.
- В частности, M^K - определяющая шкала для класса всех формул, выводимых в K .

Примеры других аксиом и классов шкал

- Символ $\Diamond$ («возможно») вводится как сокращение для $\neg\Box\neg$,

  то есть $\Diamond A$ - *это* $\neg\Box\neg A$.

- *Логика универсальной модальности ("всегда", "всюду")*:
- $S5 = K \cup \{\Box A \to A;\ \ \Box A \to \Box\Box A;\ \ \Diamond\Box A \to A\}$
- Условие на шкалы: отношение достижимости рефлексивно, транзитивно и симметрично.
- Определяющая шкала: $(N;R)$; $R = N \times N$.

- *Логика «предсказуемого завтра»*:
  $SL = K \cup \{\Box A \equiv \Diamond A\}$.
- Условие на шкалы: $\forall s\, \exists!\, t\ \ R(s; t)$.
- Определяющая шкала: $(N;R)$;

  $R(s; t) \Leftrightarrow t = s + 1$.
- *Логика «неопределенного завтра»*:
  $D = K \cup \{\Box A \rightarrow \Diamond A\}$.
- Условие на шкалы: $\forall s\, \exists\, t\ R(s; t)$.
- Определяющая шкала: $(N^*; R)$, где N^* — слова в алфавите N; $R(s; t) \Leftrightarrow |t|=|s|+1$ и t — продолжение s.

Неожиданный экзамен

- В субботу преподаватель объявил, что на следующей неделе будет экзамен, но накануне экзамена студенты не будут знать, когда он будет.
- Вывод: «Экзамена не будет».
- Экзамен состоялся в среду.

Идея немонотонной логики

- Дополнительная информация может уменьшать множество доказуемых утверждений.
- Оплата клетки для птицы.
- Логика простейших объяснений.
- Логика незнания.
- Логика веры.