Введение в математическую логику и теорию алгоритмов

Лекция 3

Алексей Львович Семенов

Логика высказываний

Синтаксис.

Логические константы (логические значения):

0 (Л, Ложь, F), 1 (И, Истина, T) .

Упорядоченный (счетный) алфавит *логических имен*:

$A_0, A_1, A_2, \ldots$ (можно ограничиться алфавитом 01)

Логические связки:

$\neg$ - отрицание, «не»

$\wedge$ - конъюнкция, «и»

$\vee$ - дизъюнкция, «или»

$\rightarrow$ - импликация, «влечет», «если…, то…»

$\equiv$ - эквивалентность, «равносильно»

Индуктивное построение формулы (исчисление):

Правило создания

- Логические константы, логические имена – формулы.
- Если Φ, Ψ - формулы, $\tau \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \equiv\}$, то

  $(\neg\Phi)$, $(\Phi\tau\Psi)$ – формулы.

Правило окончания – все подходит.

Теорема об однозначности анализа формул логики высказываний. Для любой формулы Θ логики высказываний выполнено ровно одно:

- Θ – логическая константа,
- Θ – логическое имя,
- $\Theta = (\neg\Phi)$, где Φ однозначно определяется по формуле Θ,
- $\Theta = (\Phi\tau\Psi)$, где τ, Φ, Ψ однозначно определяются по формуле Θ.

Д. Идея – анализ скобочной структуры, баланс скобок…

Сокращения. Опускание скобок.

- Будем опускать внешние скобки.
- Формулу $(\neg A_i)$ будем записывать $\neg A_i$.
- Старшинство операций и т. д.
- $\neg A_1 \vee A_2$ – это сокращение для $((\neg A_1) \vee A_2)$.

Можно считать

$(\Phi \to \Psi)$ сокращением для $((\neg\Phi) \vee \Psi)$,

$(\Phi \equiv \Psi)$ сокращением для $((\Phi \wedge \Psi) \vee ((\neg\Phi) \wedge (\neg\Psi)))$.

- Можно восстановить исходный вид.

Логика высказываний

- Логика высказываний. Семантика.
- ***B*** = {0,1}.
- Семантика связок: операции над высказываниями (часть уже была)

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \equiv B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Названия и содержательный смысл. Примеры и трудности естественного языка.

- Разделительное ИЛИ
- Союз И
- Парадоксы импликации

Логика высказываний

Семантика.

B $^{\omega}$ **-** множество бесконечных последовательностей 01.

Фиксируем *интерпретацию* $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots \in$ ***B*** $^{\omega}$.

Значение формулы при данной интерпретации α *.*

Индукция по построению :

1. Значением логической константы является она сама.
2. Значением логического имени A_i является α_i .
3. Значением формулы $(\neg\Phi)$ является отрицание значения формулы Φ, т.е. **Зн** Φ **= 1- Зн** Φ**.**
4. Значением формулы $(\Phi\tau\Psi)$**, где** $\tau\in\{\to,\wedge,\vee,\equiv\}$ является результат применения операции τ к значениям формул Φ**,** Ψ**.**

Однозначность значения получается из однозначности анализа формулы.

Значение формулы – функция $B^{\omega} \to B$**.**

Пусть наибольший номер переменной в формуле равен n-1.

Тогда формула задает функцию $B^n \to B$***.***

Таблица функции. Построение функции по формуле

A_0	A_1	A_2	$(A_0 \rightarrow \neg A_1) \wedge \neg (A_2 \vee A_0)$	
0	0	0		1
0	0	1		1
0	1	0		0
0	1	1		0
1	0	0		1
1	0	1		1
1	1	0		0
1	1	1		0

Таблица функции. Построение функции по формуле

A_0	A_1	A_2	$(A_0 \to$		$\neg A_1)$	$\wedge$	$\neg (A_2 \vee A_0)$
0	0	0	1		1		0
0	0	1	1		1		1
0	1	0	1		0		0
0	1	1	1		0		1
1	0	0	1		1		1
1	0	1	1		1		1
1	1	0	0		0		1
1	1	1	0		0		1

Таблица функции. Построение функции по формуле

A_0	A_1	A_2	$(A_0 \to \neg A_1) \wedge \neg (A_2 \vee A_0)$				
0	0	0	1		1	1	0
0	0	1	1		1	0	1
0	1	0	1		0	1	0
0	1	1	1		0	0	1
1	0	0	1		1	0	1
1	0	1	1		1	0	1
1	1	0	0		0	0	1
1	1	1	0		0	0	1

Таблица функции. Построение функции по формуле

A_0	A_1	A_2	$(A_0 \rightarrow$		$\neg A_1)$	$\wedge$	$\neg$	$(A_2 \vee A_0)$
0	0	0	1			1	1	
0	0	1	1			0	0	
0	1	0	1			1	1	
0	1	1	1			0	0	
1	0	0	1			0	0	
1	0	1	1			0	0	
1	1	0	0			0	0	
1	1	1	0			0	0	

Построение формулы по функции

- В длинной конъюнкции и дизъюнкции будем опускать скобки. $\vee \Phi_i$, $\wedge \Phi_i$ аналогично Σa_i, Πa_i.
- Если множество одноэлементно, то значение совпадает с ним, если пустое , то $\vee$ **= 0,** $\wedge$ **= 1** .
- Где функция, задаваемая формулой $A_0 \wedge \neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3$ равна 1?

  \- Только при значении $<\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3> = <1,0,0,1>$.
- Фиксируем натуральное число *n*.

Обозначения $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$; $A = A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$,

- $(0, A_i) = \neg A_i$
- $(1, A_i) = A_i$
- $(\alpha, A) = ((\alpha_0, A_0) \wedge (\alpha_1, A_1) \wedge \ldots \wedge (\alpha_{n-1}, A_{n-1}))$

Теорема о совершенной дизъюнктивной нормальной форме.

Всякая функция f: $\boldsymbol{B}^n \to \boldsymbol{B}$ задается формулой

$\vee(\alpha, A)$ по всем α, для которых $f(\alpha) = 1$ **(если пусто, то 0)**

Это – СДНФ. (Д.Н.Ф. …)

Тавтологии

Тавтология – формула, функция которой всюду равна 1.
Множество тавтологий разрешимо.
Д. Построим таблицу…

Подстановка

Пусть w, u – произвольные слова, x – буква. Подстановка u вместо x в w – это результат одновременной замены всех вхождений x в w на u. Обозначение: w[*u*/*x*].

Свойство подстановки. Пусть А и Б – две формулы, x – имя и фиксирована некоторая интерпретация. Тогда, при этой интерпретации,

- Зн А[Б/*x*] = Зн А[ЗнБ /*x*].

Свойство подстановки выполнено и может быть (обычно легко) доказано в разных ситуациях, когда мы рассматриваем значения индуктивно строящихся выражений. Его смысл в том, что значение выражения определяется значением компонентов, из которых оно построено, а не их внутренней структурой. При этом, А и Б – не обязательно формулы. Это могут быть и другие выражения.

Модальная логика

Синтаксис

Новая связка:

$\Box$ – необходимо.

В индуктивное построение формулы логики высказываний добавляется еще одна возможность:

• если Φ — формула, то ($\Box\,\Phi$) — тоже формула (читается «необходимо Φ»).

Определение

• Имя – формула

• Если Φ, Ψ - формулы, $\tau \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \equiv\}$,

то $(\neg\Phi)$, $(\Box\,\Phi)$, $(\Phi\tau\Psi)$ – формулы.

Здесь нет логических констант (для упрощения).

Модальная логика
Семантика

Содержательные интерпретации выражения $\Box A$:

- Необходимо *A*
- Всегда *A*
- Должно быть *A*
- Известно, что *A*
- Считается, что *A*
- Утверждение *A* доказуемо
- После завершения программы выполнено *A*

Другие *модальности* (не похожие на необходимость):

- Желательно, вероятно, запрещено, хорошо, удобно…

Вероятностные логики, нечеткие логики, квантовые логики… - неклассические

Модальная логика.
Семантика

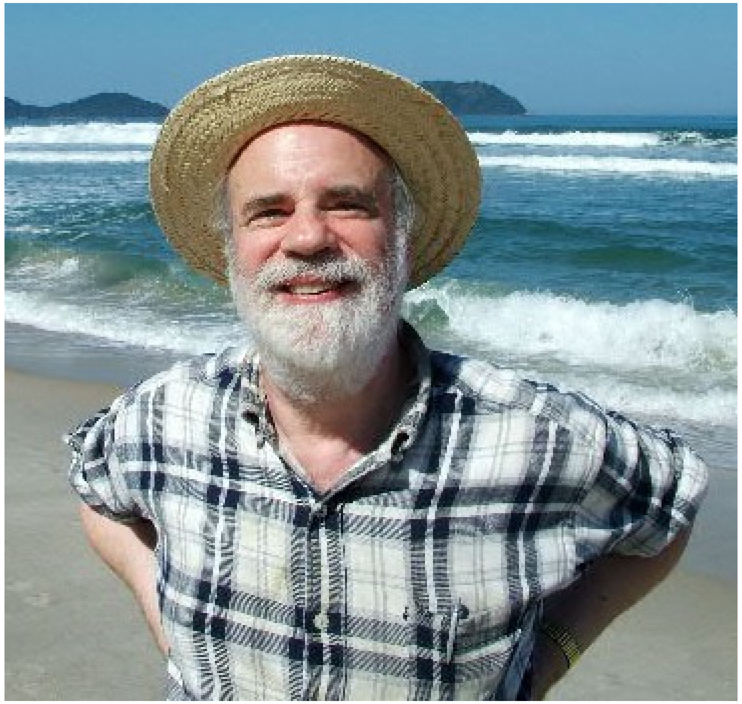
Шкалой Крипке называется пара
$F = \langle S, R \rangle$, где

• S — произвольное непустое множество *миров*,

• $R \subseteq S \times S$ — произвольное отношение *достижимости* (одного мира из другого).

(ок. 1958)

Сол Крипке (13.11. 1940 -)



Модальная логика.

Семантика

• *Интерпретация V* каждое имя *p* отображает в множество миров, $V(p) \subseteq S$.

• ***Значение формулы A в мире s шкалы F при интерпретации V – это элемент B*, определяемый индуктивно.**

• **Зн (*p, s*) = 1** $\Leftrightarrow$ $s \in V(p)$ (таким образом, *V* (*p*) – это множество миров *s*, в которых *p* истинна).

• **Зн (** $\Box$ *A, s***)** = $\wedge$ **Зн (***A, t***)** по всем *t*, достижимым из *s* (бесконечная конъюнкция – не формула, но аналогична конечной).

• Остальное – как в логике высказываний.

Модальная логика

Истинность

Отношение $F,s,V \vDash A$. *Читается* «***формула A истинна в мире s шкалы F при интерпретации V***».

- Формула *A* ***истинна в шкале*** *F,* обозначение: $F \vDash A$, если она истинна в любом мире этой шкалы при любой интерпретации.
- Формула ***истинна***, если она истинна в любой шкале.

Модальная логика

Свойства истинности

для любых $F; A; B$.

1. Подстановка формул вместо имён сохраняет истинность.
2. $F \vDash (\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B))$.
3. Если $F \vDash A$, то $F \vDash \Box A$.
4. Если $F \vDash A$ *и* $F \vDash (A \to B)$, то $F \vDash B$.

Д. 1. Индукция по построению – определению значения. Значение формулы определяется значениями использованных подформул (как в Лемме о подстановке).

4. Рассуждаем в данном мире при данной интерпретации.

3. А – во всех мирах, значит, во всех мирах, достижимых из данного.

Доказательство 2.

- $F \models (\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B))$
- Возьмем интерпретацию и мир.
- Пусть посылка $\Box(A \rightarrow B)$ – истинна.
- $(A \rightarrow B)$ – истинна во всех достижимых
- Пусть $\Box A$ – истинна.
- A – истинна – во всех достижимых
- B – истинна во всех достижимых
- $\Box B$ – истинна

Введение в математическую логику и теорию алгоритмов

Лекция 3

15 сентября 2012 г.

Последние изменения 2 октября 2012 г.