Введение в математическую логику и теорию алгоритмов

Алексей Львович Семенов

С первой лекции:

Породимые множества

•исчисления

Вычислимые функции

•алгоритмы

Попытка расширить пределы вычислимого

- Графы, вершины двух типов
  – Функциональные – один вход и один выход
  – Условные один вход и два выхода.
  – в вершинах таких графов описания вычислимых функций и свойств (с учетом числа выходов).
- Получаются блок-схемы. Понятно, как блок-схема работает.
- **Теорема о структурном программировании**. Функции, вычисляемые блок-схемами, вычислимы

Универсальность

- Фиксирован язык описания алгоритмов.
- Можно считать, что алфавит – 01
- Любое слово – описание, в том числе – нигде не определенной функции.
- Универсальный алгоритм:

$УА (\langle A,x \rangle) = A(x)$

- Этот алгоритм выясняет, является ли полученное слово кодом пары, если – да, то выделяет в ней объект (исходное данное), описания действий начала, продолжения, переработки, извлечения результата и дальше эти описания применяет.
- Можно показать, что существует и универсальное перечислимое множество У – такое множество пар $\langle x,y \rangle$, что для всякого перечислимого множества А есть такое значение x, что $A = \{y \mid \langle x,y \rangle \in У\}$

Диагонали

В квадратной таблице выписано (по горизонтали) конечное число цепочек.

1	2	8	2	3
0	3	7	3	5
7	6	0	3	9
8	2	7	5	8
3	0	6	5	0

Как построить цепочку, которой нет в таблице?

Диагональ (конечная)

№чл.посл. N	0	1	2	3	4
0	1	2	8	2	3
1	0	3	7	3	5
2	7	6	0	3	9
3	8	2	7	5	8
4	3	0	6	5	0

Взять диагональ и испортить её в каждом члене.
Например, прибавляем 1 и получаем 24161.
t(i,j) – это элемент, стоящий в i–ой строке и j–ом столбце.
Цепочка a(i) = t(i,i) +1
Пусть она в строке c. Тогда t(c,c) = t(c,c) +1.

Диагональ несчетности (Кантора)

Аргумент № функц.	0	1	2	3	4	…
0	1	0	0	1	0	
1	1	1	0	1	0	
2	1	0	0	1	1	
3	0	0	0	1	0	
4	0	1	0	1	0	

……………………………………………………………………………

Функция, которой нет в таблице – это 1 - t(i,i), не t(i,i), нули заменили на единицы, единицы – на нули.

Линейный порядок на словах

- Λ, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001,…

Существуют ли невычислимые функции?

- Сколько есть вычислимых функций?
- Не больше, чем описаний
- Не больше, чем слов.

- Счетное количество
- Всех функций – несчетное.

Диагональ невычислимости

Имена строк и столбцов - все слова.

В клетке (i,j) - значение функции с описанием i на аргументе j.
Если значения нет, оставим клетку пустой:

Аргумент Функция	0	1	01	…	1111
0				…	
1				…	
01	11	1	01	…	01
……	…	…	…	…	…
001…	0	11	111	…	(диаг) 10

Диагональ невычислимости

Аргумент Функция	0	1	01	…	1111
0				…	
1				…	
01	11	1	01	…	01
……	…	…	…	…	…
001…	0	11	111	…	(диаг) 10

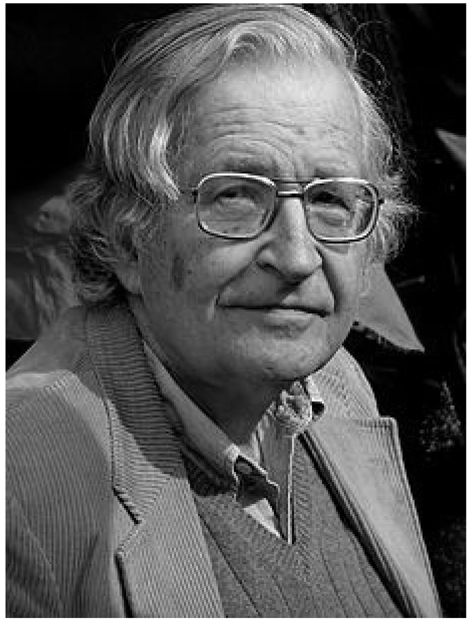
«Диагональная» функция t(i,i) вычислима. Вычислима и «испорченная диагональ» d(i), которая равна нулю, если t(i,i)>0, и 1, если t(i,i)=0. Кажется, что d не должно быть в таблице! Если она в строке i, то d(i,i) и ноль и не ноль.

В чем тут дело? В клетке (i) не стоит ничего!

Диагональ невычислимости

- Функция d вычислима и принимает только значения 0 и 1, задает перечислимое множество.
- Может ли это множество оказаться разрешимым?
- Если оно разрешимо, то существует слово k, являющееся описанием вычислимой характеристической (всюду определенной) функции этого множества.
- диагональное рассуждение дает противоречие.
- **Теорема.** Существует такое перечислимое множество A, заданное вычислимой функцией f, что:
- Оно не разрешимо
- Функцию f нельзя продолжить до вычислимой всюду определенной, в частности:
- Характеристическая функция множества A не вычислима.

Грамматики
(Ноам Хомски, 07.12.1928 -)

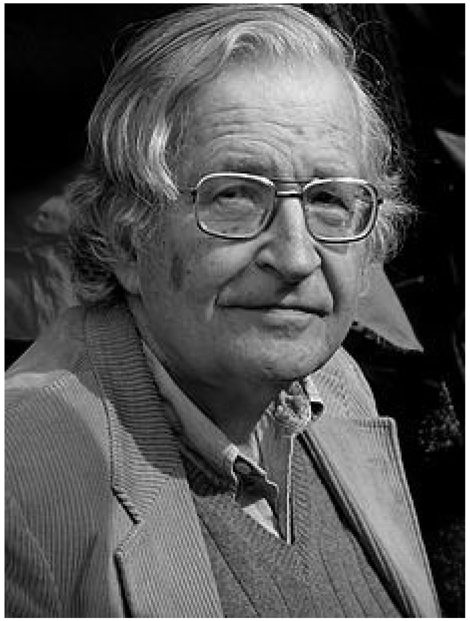


Определение.

Грамматика Г – это цепочка <Σ,Ω,П,S>

- Σ – основной алфавит Г
- Ω – вспомогательный алфавит Г
- S – начальный символ Г
- $\Sigma \cap \Omega = \emptyset$, объединение Σ и Ω – это алфавит Г, обозначим его Δ.
- П – это конечное множество пар слов в алфавите Δ. Эти пары называются заменами.

Грамматика
(Ноам Хомски, 07.12.1928 -)



определяет исчисление Г*

В правило создания Г* входят:

- S
  - Всякий вывод в исчислении начинается с S.
- Для каждой замены <u,v> из П, все пары вида <tup,tvp>, где t,p – произвольные слова в алфавите Δ
  - Один шаг вывода состоит в замене в слове некоторого вхождения u на v.
- Правило окончания для грамматики Г состоит из всех слов в алфавите Σ.
  - Таким образом, породимые слова не могут содержать букв из вспомогательного алфавита.

правило создания – бесконечно, его описание - слово в конечном алфавите (как всегда – в алфавите 01).

Примеры грамматик

Как породить все цепочки из 0 и 1? – $\Gamma = \langle \Sigma, \Omega, \Pi, S \rangle$,

Основной алфавит $\Sigma = \{0, 1\}$

Вспомогательный алфавит $\Omega = \{S\}$

$\Pi = \{S \to S0, \quad S \to S1, \quad S \to \Lambda\}$

Пример вывода: $S \to S0 \to S10 \to S010 \to S0010 \to 0010$.

Задача. Как породить все десятичные числа?
Пример числа: -3.141592

Задача. Что делает грамматика с основным алфавитом $\{a\}$,
вспомогательным $\{S, B, M, E\}$ и правилами

$\Pi = \{S \to BaE, B \to BM, \ Ma \to aaM, ME \to E, B \to \Lambda, E \to \Lambda\}$?

Задача. Как породить все слова, состоящие из одинакового количества букв a и b?

Задача. Построить язык, который породить нельзя

Тезис Поста.

Всякое породимое множество породимо некоторой грамматикой.

Эмиль Пост (11.02.1897— 21.04.1954)

Алгоритмы Маркова

- **Определение** Описание алгоритма Маркова – это цепочка Φ = $<\Sigma,\Delta,\Pi>$, где:
- Σ – *основной алфавит* Φ, у нас 01, $\Sigma \subseteq \Delta$
- Π – цепочка слов вида $u \rightarrow v$, *или* $u \rightarrow \bullet\, v$ - *замен* Φ; *u, v* в алфавите Δ; $\rightarrow$, $\bullet \notin \Delta$,
- *u* называется левой частью замены, *v* правой.
- Замены, содержащие $\rightarrow\bullet$, называются заключительными

Алгоритмы Маркова

- алгоритм?
  - Задан объект – слово
- Начало:
  - не требуется делать ничего – тождественное преобразование объекта.
- Продолжение:
  - Л, если нет ни одной замены, левая часть которой входит в объект, или в объекте есть •; иначе И
- Переработка:
  - Найти первую замену, левая часть которой входит в объект, найти первое ее вхождение в объект и заменить его на правую часть этой замены.
- Извлечение результата
  - Стереть в слове все символы •, которые есть.

Пример:

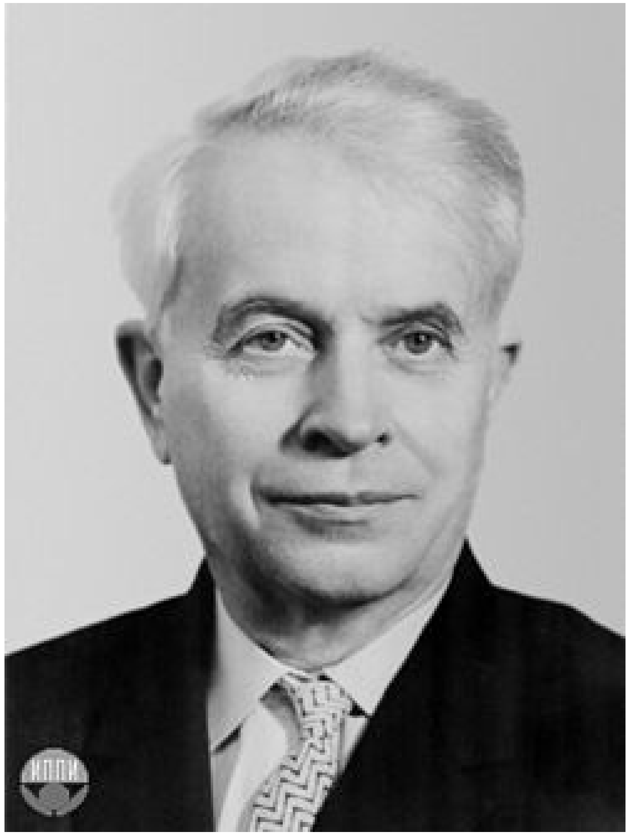
алфавит из трех символов 01 и дополнительный символ | - палочка.

Цепочка замен:

- |0 → 0||
- 1 → 0|
- 0 →

Исходный объект 101

- 0|01
- 00||1
- 00||0|
- 00|0|||
- 000|||||
- 00|||||
- 0|||||
- |||||



Андрей Марков мл.

(9 [22].09.1903 – 11.10.1979)

Тезис Черча.

Всякая вычислимая функция вычислима некоторым алгоритмом Маркова.

Алонзо Черч (14.06.1903 — 11.08. 1995)

Алгоритмические проблемы

- Проблемы построения алгоритмов
- Проблема построения алгоритма разрешения – вычислимость характеристической функции

10-ая Проблема Гильберта

- Построить алгоритм, который по всякому алгебраическому уравнению от нескольких неизвестных с целыми коэффициентами, выясняет, есть ли у него решение в целых числах.
- Отрицательное решение: Юрий Матиясевич (02.03.1947 -)