Введение в математическую логику и теорию алгоритмов

Лекция 14

Алексей Львович Семенов

- Классическая и современная математика
- Нестандартный анализ (восстановление интуиции Лейбница)
- Бесконечно большие и бесконечно малые
- Свойства последовательностей
- Аналоги классических определений и теорем
- Непрерывность
- Производная
- Интеграл
- Конструктивный анализ

Классическая математика

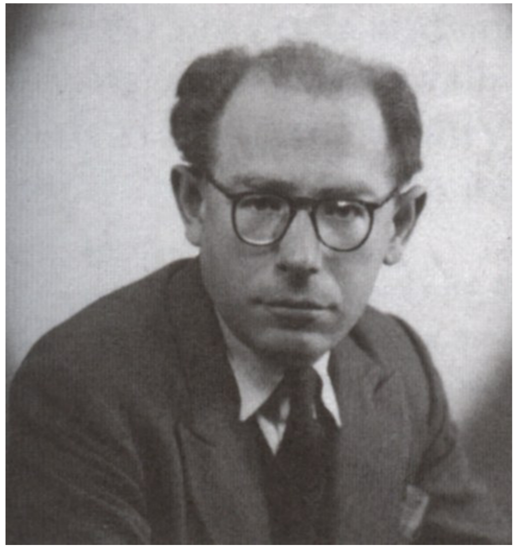
- «Содержательные» рассуждения

Основания математики. Аксиоматика

- Начала Евклида
- Г. Фреге – логика
- Г. Кантор – теория множеств
- Д. Гильберт: «Никто не изгонит нас из рая, который основал Кантор»
- Проблемы непротиворечивости и полноты

Нестандартный анализ

- Существует система «содержательных», интуитивных рассуждений, использующая бесконечно малые (и бесконечно большие) объекты. Она дает правильные результаты.
- Использование языка «эпсилон-дельта» ничего не добавляет к интуиции.
- Нельзя ли построить корректную модель, где бесконечно малые существуют?



Abraham Robinson
06.10.1918 – 11.04.1974

Нестандартный анализ

- Структура: R – действительные числа;
  для любого отношения на R от любого числа аргументов в сигнатуре имеется имя.

В частности, имеются имена любых функций, имеется имя N одноместного отношения, задающего в R множество натуральных чисел.

- $^*R$ – собственное элементарное расширение структуры R, например, модель для теории $\mathrm{Th}(R) \cup \{c > i \mid i \in N\}$, где c – новое имя (теорема компактности).

Нестандартный анализ

- Элементы $*R$ – *гипердействительные числа*.
- Элементы R как подструктуры $*R$ – *стандартные числа*, все остальные – *нестандартные*.
- Любое отношение из нашей сигнатуры продолжено на $*R$.

Принцип переноса:

- Истинность любого утверждения, которое выразимо формулой нашей сигнатуры, совпадает на R и $*R$.
- $*R$ – упорядоченное поле.

Нестандартный анализ

- Отношение N (быть натуральным числом) продолжается на $*R$.
- *Гипернатуральные числа* – такие n, что $*R \vDash N(n)$.
- Множество гипернатуральных чисел образует нестандартную модель арифметики.

Нестандартный анализ

- Гипердействительное число r *конечно*, если $a < r < b$ для некоторых стандартных a и b.
- В противном случае, число r *бесконечно большое* (положительное бесконечно большое, если $0 < r$, и отрицательное бесконечно большое, если $r < 0$).
- Существуют (положительные) бесконечно большие числа – из (добавленных) аксиом.
- (Можно показать, что такое число существует в любом собственном элементарном расширении R.)

Нестандартный анализ

- Гипердействительное число α – *бесконечно малое*, если α меньше любого положительного стандартного числа и больше любого отрицательного стандартного числа.
- Число 0 – бесконечно малое.
- Если r – бесконечно большое число, то по принципу переноса $1/r$, $1/5r$, $1/r^2$, и т. д., являются бесконечно малыми.
- Два числа r_1 и r_2 *бесконечно близки* ($r_1 \approx r_2$), если разность $r_1 - r_2$ бесконечно мала.

Нестандартный анализ

Утверждение 1 (стандартная часть числа). Любое конечное число бесконечно близко к (единственному) стандартному.

Доказательство.

- Единственность: если r бесконечно близко к стандартным r_1 и r_2, то $r_1 \approx r_2$, $r_1 = r_2$.
- Пусть α – конечное нестандартное число. A – множество стандартных чисел, меньших α, B – больших α. Множества A и B непусты, $A \cup B = R$, (точная верхняя грань A) = =(точная нижняя грань B) = $c \in R$ (из полноты R); $\alpha \approx c$.
- *Стандартная часть* α обозначается $st(\alpha)$.

Нестандартный анализ

- В $^*R$ существуют бесконечно большие гипернатуральные числа.

Различия между R и $^*R$:

- Любое подмножество R (тривиально) определимо: отношение в сигнатуре.
- Это не так для $^*R$.

Нестандартный анализ

Утверждение 2 (неопределимость бесконечных гипернатуральных чисел). Множество бесконечных гипернатуральных чисел не определимо в $*R$.

- ***Доказательство.*** Пусть множество бесконечных гипернатуральных чисел задается формулой $P(x)$. Существование наименьшего:

  $$\exists y\, P(y) \to \big(P(0) \vee \exists z\big(P(z) \wedge \neg P(z-1)\big)\big)$$

  выполнено в R, но ложно в $*R$.
- Из утверждения 2 следует, что множество бесконечно малых чисел, функция st и пр. не определимы в $*R$.

Нестандартный анализ и обычный анализ

- Стандартная последовательность a_i – это функция $a: N \to R$. Она продолжается на $*R$ (элементарное расширение). В $*R$ она определена на всех гипернатуральных числах.
- ***Утверждение 3 (предел последовательности).*** Стандартное число b является пределом стандартной последовательности a_i тогда и только тогда, когда $a_n \approx b$ для любого бесконечно большого гипернатурального n.

Нестандартный анализ

Доказательство утверждения 3. (Ст → Нест)

- Пусть стандартное число b является пределом стандартной последовательности a_i.
- Пусть n – гипернатуральное бесконечно большое, ε – произвольное стандартное, $\varepsilon > 0$.
- По определению предела (как в R, так и в $*R$):

$$\forall \boldsymbol{i}\Big((N(\boldsymbol{i}) \wedge \boldsymbol{i} > n_{\mathbf{0}}) \;\rightarrow\; |b - a(\boldsymbol{i})| < \varepsilon\Big)$$

для некоторого стандартного натурального $n_{\mathbf{0}}$. Так как $n > n_{\mathbf{0}}$, то $|b - a(n)| < \varepsilon$. Значит, $a(n) \approx b$.

Нестандартный анализ

- ***Доказательство утверждения 3.*** **(Нест → Ст)**
- Пусть $a_{\boldsymbol{n}} \approx b$ для любого бесконечно большого гипернатурального n.
- Пусть ε – стандартное положительное число.
- В $*R$ выполнено

$$\exists n_0 \forall \boldsymbol{i} \left(\left(N(\boldsymbol{i}) \wedge \boldsymbol{i} > n_0 \right) \rightarrow |b - a(\boldsymbol{i})| < \varepsilon \right)$$

– в качестве n_0 достаточно взять любое бесконечно большое гипернатуральное число.
- По принципу переноса это утверждение выполнено и в R.

Нестандартный анализ

- ***Утверждение* 4 (*предельная точка*).** Стандартное число b – предельная точка стандартной последовательности a_i тогда и только тогда, когда $a_n \approx b$ для некоторого бесконечно большого гипернатурального n.

(Д. Можно выбрать бесконечную подпоследовательность.)

Нестандартный анализ

- ***Утверждение 5 (фундаментальность).*** Стандартная последовательность a_i фундаментальна тогда и только тогда, когда $a_n \approx a_m$ для любых бесконечно больших гипернатуральных n и m.

- Утверждения 3 – 5 можно рассматривать, как нестандартные **определения** соответствующих понятий. (Возврат к «классической интуиции».)

Нестандартные аналоги стандартных теорем

Утверждение 6 (предельные точки ограниченных последовательностей).
У ограниченной стандартной последовательности есть предельная точка.

- ***Доказательство.***
  Если последовательность a_i ограничена, то любой ее элемент конечен. Пусть n – бесконечно большое гипернатуральное число. Гипердействительное число a_n конечно, из утверждения 4 следует, что $st(a_n)$ – предельная точка.

Нестандартные аналоги стандартных теорем

- ***Утверждение 7 (сходимость фундаментальных последовательностей).*** Стандартная фундаментальная последовательность сходится.
- ***Доказательство.*** Пусть для некоторого (бесконечного) гипернатурального n элемент a_n бесконечен. При бесконечно больших i выполнено $a_n \approx a_i$ (Утв. 5). Формула $N(i) \wedge |a_n - a_i| < 1$ для стандартных i ложна, для нестандартных i – истинна, что противоречит утверждению 2.
- Итак, все элементы последовательности конечны. Для любых элементов с бесконечными номерами $a_n \approx a_i \approx st(a_n)$. Согласно утверждению 3, $st(a_n)$ и есть предел.

Нестандартные аналоги стандартных теорем

- ***Утверждение 8 (непрерывность).*** Функция (стандартная) $f : R \to R$ непрерывна в (стандартной) точке r тогда и только тогда, когда для любого гипердействительного числа $\alpha \approx r$, в котором функция f определена, выполнено $f(\alpha) \approx f(r)$.
- Доказать самостоятельно.
- Как обычно, мы скажем, что функция непрерывна на (стандартном) множестве A, если она непрерывна в каждой (стандартной) точке A.

Нестандартные аналоги стандартных теорем

- ***Утверждение 9 (равномерная непрерывность).*** Функция (стандартная) $f : R \to R$ равномерно непрерывна на (стандартном) множестве A тогда и только тогда, когда $f(\alpha) \approx f(\beta)$ для любых (не только стандартных) гипердействительных чисел $\alpha, \beta \in A,\ \alpha \approx \beta$.
- Доказать самостоятельно.

Нестандартный анализ

- Для любого подмножества $A \subset R$ в нашей сигнатуре имеется символ отношения $A(x)$, такой, что $R \vDash A(r) \Leftrightarrow r \in A$. Это отношение продолжается на $^*R$.
- Если множество A конечно, то расширение не содержит новых элементов, поскольку $R \vDash \forall x \left(A(x) \equiv \bigvee_{i \leq k} x = r_i\right)$, где $r_{\mathbf{0}},\ldots, r_{\boldsymbol{k}}$ – список всех элементов множества A.

Как в множестве A могут появиться нестандартные элементы?

Нестандартный анализ

- A бесконечно → расширение A должно содержать нестандартные элементы.
- Д. Пусть $a_0,\ldots,a_k,\ldots$ – произвольная последовательность попарно различных элементов из A. Тогда элемент a_n для бесконечно большого гипернатурального n принадлежит расширению A (принцип переноса) и отличается от любого стандартного числа r. Действительно, или
- $R \vDash ((\forall \boldsymbol{i} \in N)(a_{\boldsymbol{i}} \neq r))$, если r не встречается среди a_i, или
- $R \vDash ((\forall \boldsymbol{i} \in N)(\boldsymbol{i} \neq j \to a_{\boldsymbol{i}} \neq r))$ для некоторого натурального j ($r = a_j$). В обоих случаях применим принцип переноса.

Нестандартные аналоги стандартных теорем

- ***Утверждение 10.*** Множество (стандартное) ограничено тогда и только тогда, когда все его гипердействительные элементы конечны.
- Доказать самостоятельно.

Нестандартные аналоги стандартных теорем

- ***Утверждение 11.*** Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на нем.
- ***Доказательство.***
- В стандартной части это так.
- Пусть гипердействительное число α принадлежит отрезку, тогда значение функции в точке α бесконечно близко к стандартному значению в стандартной точке $st(\alpha)$, то есть конечно.

Нестандартные аналоги стандартных теорем

- ***Утверждение 12.*** Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем.
- ***Доказательство.***

Пусть гипердействительные числа α, β принадлежат отрезку, $\alpha \approx \beta$.

Тогда $st(\alpha) = st(\beta)$, функция непрерывна в стандартной точке $st(\alpha)$, поэтому значения функции в точках α и β бесконечно близки.

(Где мы использовали свойство отрезка?)

Нестандартные аналоги стандартных теорем

- ***Утверждение 13.*** Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, $f(a) > 0$, $f(b) < 0$. Тогда $f(c) = 0$ для некоторого $c \in [a, b]$.
- ***Доказательство.*** Пусть n – бесконечно большое гипернатуральное число, разобьём отрезок $[a, b]$ на n сегментов длины $(b - a)/n$.
- (Чуть более строго: для любого гипернатурального $\boldsymbol{i} < n$ через s_i обозначим число $a+(b - a)\boldsymbol{i}/n$. Сегмент – это отрезок $[s_i, s_{i+1}]$.)
- Найдется (принцип переноса) такое $j < n$, что $f(s_j) \geq 0, f(s_{j+1}) \leq 0$. Поскольку $s_j \approx s_{j+1}$, то $st(s_j) = st(s_{j+1})$. Из непрерывности $f(s_j) \approx f(st(s_j)) \approx f(s_{j+1})$, то есть $f(st(s_j)) = 0$.

Нестандартные аналоги стандартных теорем

- ***Утверждение 14.*** Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда в некоторой стандартной точке $c \in [a, b]$ функция f достигает максимума.

(Д. Разбиение.)

Нестандартные аналоги стандартных теорем

- ***Утверждение 15.*** Стандартное число a является производной функции f в точке x_0 тогда и только тогда, когда для всех бесконечно малых $\alpha \neq 0$ выполнено
$$\big(f(x_0+\alpha) - f(x_0)\big) / \alpha \approx a.$$
- Доказательство "определения" и доказательство того, что дифференцируемая функция непрерывна, – самостоятельно.

Нестандартные аналоги стандартных теорем

Утверждение 16 (теорема Ролля). Пусть стандартная функция f определена и дифференцируема на отрезке $[a,b]$ и $f(a) = f(b) = 0$. Тогда $f'(c) = 0$ для некоторого стандартного $c \in [a,b]$.

- ***Доказательство.*** Если $f(x) = 0$ тождественно на $[a,b]$, то $f'(c) = 0$ внутри $[a,b]$. Пусть $f(x) > 0$ для некоторого $x \in [a,b]$, и в точке $c \in [a, b]$ функция f достигает максимума. Пусть $\alpha \approx 0$, $\alpha > 0$, тогда

$$0 \geq \big(f(c+\alpha) - f(c)\big)/\alpha \quad \text{и} \quad 0 \leq \big(f(c-\alpha) - f(c)\big)/(-\alpha),$$

$$f'(c) = st\Big(\big(f(c+\alpha) - f(c)\big)/\alpha\Big) =$$

$$= st\Big(\big(f(c-\alpha) - f(c)\big)/(-\alpha)\Big), \text{ то есть } f'(c) = 0.$$

Нестандартные аналоги стандартных теорем

- Интеграл
- Для интегрирования непрерывных функций достаточно рассмотреть разбиение отрезка на сегменты одинаковой длины (как в доказательстве утверждений 13, 14), но в более общем случае нам полезно уметь работать с произвольными разбиениями.

Нестандартные аналоги стандартных теорем

- Фиксируем какое-то отображение ψ множества стандартных действительных чисел в множество всех конечных последовательностей $a_0 < a_1 < \cdots < a_k$ стандартных действительных чисел.
- В R существует функция $P(x, y)$, такая, что для $r \in R$, $i \in N$ выполнено $P(r, i) = \psi(r)_i$ (если i больше длинны $\psi(r)$, то значение P не определено).
- С помощью P легко определяются длина последовательности, длина максимального сегмента разбиения и пр. Функция $P(x, y)$ продолжается и на $^*R$.

Нестандартные аналоги стандартных теорем

Возьмем стандартную функцию f, определенную на отрезке $[a,b]$. Для любого $r \in R$, такого, что $\psi(r)$ является разбиением отрезка $[a,b]$, положим

$$J(r) = \Sigma^{k}{}_{i=1} (a_i - a_{i-1}) m(a_{i-1}, a_i),$$

$$j(r) = \Sigma^{k}{}_{i=1} (a_i - a_{i-1}) \mu(a_{i-1}, a_i),$$

где k – длина разбиения $\psi(r)$, $a_i = P(r, i)$, а m, μ – функции, вычисляющие точную верхнюю и нижнюю грань функции f на указанном сегменте (верхняя и нижняя суммы Дарбу).

Нестандартные аналоги стандартных теорем

Функции J и j продолжаются и на $*R$. Назовем гипердействительное число r *корректным*, если максимальная длина сегмента в разбиении ψ бесконечно мала. Обозначим через

$$\int\uparrow^{b}_{a} f(x)dx$$

и

$$\int\downarrow^{b}_{a} f(x)dx$$

верхний и нижний интегралы Дарбу.

Нестандартные аналоги стандартных теорем

- ***Утверждение 17.***
  $J(r) \approx \int\uparrow_a^b f(x)dx$ и $j(r) \approx \int\downarrow_a^b f(x)dx$

  для любого корректного $r \in {}^*R$.
- Следовательно, выполнено
- ***Утверждение 18.*** Интеграл (по Риману) $\int_a^b f(x)dx$ от стандартной и ограниченной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ существует тогда и только тогда, когда $J(r) \approx j(r)$ для некоторого (а, следовательно, для каждого) корректного r.

Конструктивный анализ

Конструктивное действительное число (КДЧ):

Пара алгоритмов $<A;B>$, А: $N \to Q$; B: $N \to N$,

$\forall n,m,l \left(m,l > B(n) \ \to \ |A(m) - A(l)| < 2^{-n} \right)$

B – регулятор сходимости

Равенство (регулятор), больше…

Последовательности

Функция – не зависит от представления числа

Теорема Маркова. Всякая конструктивная функция не имеет конструктивных точек разрыва.