Введение в математическую логику и теорию алгоритмов

Лекция 11

Алексей Львович Семенов

Теория множеств Цермело – Френкеля ZF

Сигнатура $\mathbf{ZF} = \{=, \in\}$.

Мы будем использовать запись $a \in b$.

Множество, подмножество, функция **vs.** класс, набор, совокупность, подкласс, отображение

Аксиомы ZF

Аксиома объемности

$$\forall u, v(\forall w(w \in u \equiv w \in v) \to u = v)$$

Описываемая структура – класс всех "чистых" множеств.

Аксиомы ZF

$\exists s \forall v (v \in s \equiv \Phi(v))$

Можно ли для каждой формулы $\Phi(x)$ добавить такую аксиому?

$\Phi(x) = x \notin x$
$\exists s \forall v (v \in s \equiv v \notin v)$
$s = \{v | v \notin v\}$
$s \in s \Leftrightarrow s \notin s$

Парадокс Рассела
$\{x | x \notin x\}$ – не множество

Аксиомы ZF

Четыре типа аксиом существования множеств

Аксиомы подмножеств

$$\forall \bar{t}\, \forall u\, \exists s\, \forall v (v \in s \equiv (v \in u \wedge \Phi(\bar{t}, v)))$$

$\bar{t}$ – вектор $t_1, \ldots, t_n$

для любой формулы $\Phi(\overline{x}, y)$

$\{x | x \in a, \Phi(\overline{b}, x)\}$ – множество

Аксиомы ZF

Аксиомы замены

$\forall \bar{t}\,($

$\quad \forall u\,\exists v\,\forall w\,(w \in v \equiv \Phi(\bar{t}, u, w)) \to$

$\quad \to \forall v\,\exists s\,\forall w\,(\exists u(u \in v \wedge \Phi(\bar{t}, u, w)) \equiv w \in s)$

$)$

$\Phi(\bar{t}, x, y) \;\Leftrightarrow\; F_{\bar{t}}(x) = \{y \mid \Phi(\bar{t}, x, y)\}$

для любого x, $F_{\bar{t}}(x)$ – множество $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ для любого a, $\{y \mid x \in a,\ y \in F_{\bar{t}}(x)\}$ – множество

Аксиомы ZF

Аксиома степени

$$\forall u\,\exists s\,\forall v\,(\forall w(w \in v \to w \in u) \equiv v \in s)$$

$x \subset y \Leftrightarrow \forall u(u \in x \to u \in y)$

$\{x \mid x \subset a\}$ – множество

Аксиомы ZF

Аксиома бесконечности

$$\exists s(\exists u(u \in s \land \forall v(v \notin u))\land$$

$$\land\forall u(u \in s \to \exists v(v \in s \land \forall w(w \in v \to (w \in u \lor w = u)))))$$

Аксиомы ZF

Аксиома регулярности (фундирования)

$$\forall u(\exists v(v \in u) \to \exists v(v \in u \wedge \neg\exists w(w \in v \wedge w \in u)))$$

Не бывает цепочек $\quad \ldots \in a_n \in a_{n-1} \in \ldots \in a_2 \in a_1.$

Мы не будем использовать данную аксиому.

Аксиомы ZF

Аксиома пустого множества

$$\exists s \, \forall u \, (u \notin s)$$

Аксиома пары

$$\forall \, u, v \; \exists s \, \forall w (w \in s \equiv (w = u \vee w = v))$$

$\{x \mid x = a \vee x = b\}$ – множество

Предварительные замечания и соглашения

"Содержательная" и "формальная" теория множеств

Модель теории **ZF**

$\exists!\, u\, \Phi(u)$ – сокращение для $\exists u(\Phi(u) \wedge \forall v(\Phi(v) \to u = v))$

$\mathbf{ZF} \models \exists!\, s\, \forall u(u \notin s)$

Пустое множество $\varnothing$

$\varnothing \in x$ – сокращение для $\exists u(\forall v(v \notin u) \wedge u \in x)$ или $\forall u(\forall v(v \notin u) \to u \in x)$

Предварительные замечания и соглашения

Если $\mathbf{ZF} \vDash \forall\, \overline{u}\, \exists!\, v\, \Phi(\overline{u}, v)$, то можно ввести $\varphi(\overline{x})$

$y \in \varphi(\overline{x})$ – сокращение для $\exists u(\Phi(\overline{x}, u) \wedge y \in u)$ или

$\forall u(\Phi(\overline{x}, u) \to y \in u)$

$y = \varphi(\overline{x}) \Leftrightarrow \Phi(\overline{x}, y)$

$\mathbf{ZF} \vDash \forall u\, \exists! s\, \forall v(v \subset u \equiv v \in s)$

$\mathcal{P}(x) = y \Leftrightarrow \forall v(v \subset x \equiv v \in y)$

$\mathcal{P}(x)$ – множество подмножеств x

$\mathbf{ZF} \vDash \forall\, u, v\, \exists! s\, \forall w(w \in s \equiv (w = u \vee w = v))$

$\{x, y\}$ – (неупорядоченная) пара множеств x и y

$\{x\}$ – обозначение для $\{x, x\}$

Предварительные замечания и соглашения

$\mathsf{Un}(x) = \{y \,|\, \exists u(y \in u \wedge u \in x)\}$ – *объединение* множества x

$\mathbf{ZF} \models \forall v \exists s \forall w (\exists u(u \in v \wedge w \in u) \to w \in s)$ (аксиома замены)

$x \cup y$ – сокращение для $\mathsf{Un}(\{x, y\})$

$x \cap y$ – *пересечение*: $\{z \,|\, z \in x \wedge z \in y\}$

$x \setminus y$ – *разность*: $\{z \,|\, z \in x \wedge z \notin y\}$

$\langle x, y \rangle$ – *упорядоченная пара*: $\{\{x\}, \{x, y\}\}$

$\langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle \;\Leftrightarrow\; x = x' \wedge y = y'$

Упорядоченная тройка $\langle x, y, z \rangle = \langle x, \langle y, z \rangle \rangle$

Предварительные замечания и соглашения

Декартово произведение

$x \times y = \{z \mid \exists u, v(u \in x \wedge v \in y \wedge z = \langle x, y \rangle)\}$

$a \in x \times y \Rightarrow a \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(x \cup y))$

Функция f ($\mathsf{Func}(f)$): множество пар $\langle a, b \rangle$

$\forall u, v, w(\langle u, v \rangle \in f \wedge \langle u, w \rangle \in f \to v = w)$

Область определения ($\mathsf{Dom}(f)) = \{z \mid \exists u(\langle z, u \rangle \in f)\}$

Область значения ($\mathsf{Ra}(f)) = \{z \mid \exists u(\langle u, z \rangle \in f)\}$

Инъективная функция ($\mathsf{IFunc}(x)$)

$f(x) = y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in f$

Множество натуральных чисел ω

$0; 1; 2; \ldots$ – $\varnothing; \{\varnothing\}; \{\varnothing, \{\varnothing\}\}; \ldots$

Следующий элемент: $S(x) = x \cup \{x\}$

$\exists s (\exists u (u \in s \wedge \forall v (v \notin u)) \wedge$
$\wedge \forall u (u \in s \to \exists v (v \in s \wedge \forall w (w \in v \to (w \in u \vee w = u)))))$

$\exists s (\varnothing \in s \wedge \forall u (u \in s \to S(u) \in s))$

$\omega = \{x \mid \forall s ((\varnothing \in s \wedge \forall u (u \in s \to S(u) \in s)) \to x \in s)\}$

Индукция: $\mathbf{ZF} \vDash \forall u (u \subset \omega \wedge u \neq \varnothing \to$
$\to (0 \in u \vee \exists v (v \in \omega \wedge v \notin u \wedge S(v) \in u)))$
Д-во. $a \subset \omega; b = \omega \setminus a;$
$0 \in b \wedge \forall u (u \in b \to S(u) \in b) \Rightarrow \omega \subset b$

Множество натуральных чисел ω

$x < y \Leftrightarrow x \in y; \quad S(m) = m \cup \{m\}$

(0) $n = 0 \vee n = S(m)$ (индукция)
(1) $n < S(n)$ (определение)
(2) $x \in n \to x \subset n$
Д-во. $x \in S(m) \Rightarrow x \in m$ или $x = m$
(3) порядок транзитивен: $n < m \wedge m < k \to n < k$ (2)
(4) $\neg(n < n)$ (индукция или аксиома регулярности)
(5) $0 < S(n)$ (индукция)
(6) $n < m \to m = S(n) \vee S(n) < m$ (индукция по m)
(7) порядок линеен: $n < m \vee n = m \vee m < n$
Д-во. $n = S(k)$, n не сравним с m; $m < k, m = k \Rightarrow m < n$ (3);
$k < m \Rightarrow n$ сравнимо с m (6)
(8) $a \subset \omega, a \neq \varnothing \Rightarrow \exists b(b \in a \wedge \forall c(c < b \to c \notin a))$
Д-во. $a' = \{u \in \omega | \exists x(x \in a \wedge x \leqslant u)\}$

Рекурсия

$x+1 \Leftrightarrow S(x)$

$[n,m] \Leftrightarrow \{k \mid k \in \omega,\ n \leqslant k \leqslant m\}$

Сложение – функция $\Sigma\colon \omega \times \omega \to \omega$

(0) $\Sigma(\langle n, 0\rangle) = n$

(1) $\Sigma(\langle n, m+1\rangle) = \Sigma(\langle n, m\rangle) + 1$

Д-во. $k \in \omega$ *корректен* $\Leftrightarrow \exists\,\Sigma\,(\Sigma\colon \omega \times [0,k] \to \omega)$.

$k\,'$ — наименьший некорректный элемент. Противоречие.

Единственность Σ.

$k < k\,' \Rightarrow \Sigma_k \subset \Sigma_{k'}$. $\mathsf{Un}\{\Sigma_k | k \in \omega\}$ – функция (аксиома замены).

$n+m \Leftrightarrow \Sigma(\langle n, m\rangle)$

Рекурсия

П: $\omega \times \omega \to \omega$

(0) $\Pi(\langle n, 0\rangle) = 0$

(1) $\Pi(\langle n, m+1\rangle) = \Pi(\langle n, m\rangle) + n$

$\mathbb{Z} = \{\langle 0, n\rangle \mid n \in \omega\} \cup \{\langle 1, n\rangle \mid n \in \omega \setminus \{0\}\}$

$\mathbb{Q} = \{a \subset \mathbb{Z} \times \omega \setminus \{0\} \mid a$ – класс эквивалентности$\}$

$\langle x_1, x_2\rangle \ \sim \ \langle y_1, y_2\rangle \Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1$

$\mathbb{R} = \{\langle a, b\rangle \mid a \subset \mathbb{Q}, b \subset \mathbb{Q}, \langle a, b\rangle$ – Дедекиндово сечение$\}$