Математическая логика и теория алгоритмов

Лекция 3

1. Логика высказываний

Логика занимается истинностью и ложностью утверждений, их доказуемостью и недоказуемостью.

Логика высказываний — это базовая часть логики, логическая система, которая встречается в самых разных ситуациях, в более сложных логиках, является основной для более сложных и нетривиальных логик, и мы начнём с неё.

1.1. Синтаксис

Мы помним, что у нас есть символы для истины и лжи, или логические константы, это ноль и единица. Ещё нам понадобится упорядоченный (бесконечный) алфавит логических имен: A_0, A_1, $A_2, \ldots$. Смысл логических имён состоит в том, что их значениями являются ноль или единица. Рассмотрение значений имён и значений более сложных выражений — формул — называется семантикой. Мы к этому ещё вернёмся.

Нам понадобятся логические связки. Мы о них уже говорили, но пока это просто символы, значки.

Логические связки:

$\neg$ — отрицание, не (иногда логики называют эту связку «кочергой»),
$\wedge$ — конъюнкция, «и»,
$\vee$ — дизъюнкция, «или»,
$\to$ — импликация, «влечет», «если…, то…»,
$\equiv$ — эквивалентность, «равносильно».

Далее мы поговорим о том, как из этих значков, констант и логических имен строить формулы. Это называется синтаксисом. Мы определим понятие формулы, задав некоторое исчисление. Такое определение часто называется индуктивным построением или индуктивным определением. Во многих логических исчислениях правило окончания является тривиальным — все создаваемые объекты объявляются порождаемыми.

Индуктивное построение формулы логики высказываний:

- Логические значения, логические имена — формулы.
- Если Φ, Ψ — формулы, $\tau \in \{\wedge, \vee, \to, \equiv\}$, то $(\neg\,\Phi)$, $(\Phi\,\tau\,\Psi)$ — формулы.

Как и в случае обычных арифметических формул, для логических формул можно ввести правила их сокращённой записи. Если использовать эти правила, то формулы становятся короче, их легче писать и читать. Конечно, нужно следить за тем, чтобы по сокращённой записи можно было восстановить исходную — до сокращения. В частности, мы договоримся об опускании некоторых скобок в формулах:

- Будем опускать самые внешние скобки.
- Подформулу (фрагмент формулы) $(\neg A_i)$ будем записывать $\neg A_i$.

- Аналогично тому, как в арифметике $a+b\times c$ расшифровывается как $a+(b\times c)$, в логике $a\vee b\wedge c$ расшифровывается как $a\vee(b\wedge c)$. Аналогично можно считать, что $a\to b\vee c$ расшифровывается как $a\to(b\vee c)$, $a\wedge b\wedge c$ — как $a\wedge(b\wedge c)$, $a\to b\equiv c$ — как $(a\to b)\equiv c$.

Мы не будем активно использовать сложные логические формулы, и нам не понадобятся детальные правила опускания скобок.

Задача. Выписать правило опускания скобок и построить алгоритм, который восстанавливает в формуле опущенные скобки.

1.2. Семантика

Перейдем к семантике формул. При содержательном понимании логические переменные означают высказывания, а логическим связкам отвечают союзы и другие конструкции естественного языка, в соответствии с названиями, приведёнными выше. Однако в математике мы определяем семантику формул, интерпретируя связки, как операции над элементами 0 и 1.

Посмотрим на таблицу:

A	B	$\neg A$	$A\wedge B$	$A\vee B$	$A\longrightarrow B$	$A\equiv B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

С таблицей для отрицания, конъюнкции и дизъюнкции мы уже встречались.

Когда мы начинаем анализировать тексты естественного языка, может возникнуть противоречие между математическим смыслом и общепринятым. Одним из примеров этого является ситуация с «или». Когда мы говорим: «Ты пойдёшь в кино или на хоккей?» — мы не имеем в виду, что может случиться и то, и другое. И ответ «И туда, и туда» будет для нас выглядеть невозможным, то есть утверждение, что я пойду и в кино, и на хоккей, будет, скорее всего, рассматриваться как ложное или отсутствие ответа.

Когда «если A, то B» истинно? Из таблиц видно, что если A — ложно, то импликация истинна. Значит, если единица равняется нулю, то три в квадрате равняется 16. Верно это, или нет? Относительно утверждений типа: «Если луна сделана из зелёного сыра, то я испанский король», можно долго выяснять, истинно оно, или ложно, или бессмысленно. Часто, говоря об импликации, предполагают какую-то связь (например, причинно-следственную) между посылкой и заключением. Математики подошли к этому вопросу очень просто, они договорились, что значок, который выглядит как стрелочка, означает операцию, которая дает 0 только если первый аргумент 1, а второй 0. Первый аргумент импликации иногда называют «посылкой» импликации, а второй — «заключением». Итак, если мы обнаружили ложность посылки, то вся импликация истинна.

Последний столбец таблицы относится к эквивалентности. Как и следовало ожидать от эквивалентности, «A эквивалентно B» истинно тогда и только тогда, когда A и B имеют одинаковые значения: если A и B оба нули, то получается единица, если A и B обе единицы, то получается единица, а если они разные, то получается 0.

В некоторых логических системах используется больше логических значений, более сложные определения истинности, и т. д. В нашем случае можно было бы ограничиться меньшим числом связок, выражая одни через другие, можно было бы взять, например, только импликацию и отрицание. Нам удобно будет использовать во многих случаях три связки, которые мы определили с самого начала: $\neg$, $\wedge$, $\vee$.

Следующим шагом должно быть определение семантики формул, то есть как, пользуясь заданной семантикой операций, определить, что такое значение, семантика, любой формулы.

Естественно, значение формулы будет определяться значением имён, которые в неё входят. Нам удобно будет, однако, определять значение в зависимости от значений всех имён, некоторые из них будут «фиктивными», то есть, на самом деле, от них значение формулы не зависит. При этом определение значения будет идти параллельно с индуктивным построением формулы. Такое параллельное определение называется индукцией по построению. Формально можно считать, что мы определяем новое исчисление, где создаваться будут пары — выражение и его значение. Заметим при этом, что в дальнейшем значениями будут не только конструктивные объекты, но особых неприятностей это вызывать не будет.

Напомним, что $\mathbb{B}$ — это множество $\{0, 1\}$, A^ω — множество всех бесконечных последовательностей элементов множества A.

Фиксируем бесконечную последовательность $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots \in \mathbb{B}^\omega$. Будем называть эту последовательность *интерпретацией.*

Значение формулы при данной интерпретации определяем *индукцией по построению*:

1. Значением логической константы является она сама.
2. Значением логического имени A_i является α_i.
3. Значением формулы $(\neg\Phi)$ является отрицание значения формулы Φ, т. е. $\text{Зн}\,(\neg\Phi) = 1 - \text{Зн}\,\Phi$.
4. Значением формулы $(\Phi\tau\Psi)$, где $\tau \in \{\to, \wedge, \vee, \equiv\}$, является результат применения операции τ к значениям формул Φ, Ψ.

Зададимся следующим вопросом: однозначно ли определено значение формулы на данной последовательности? Казалось бы — да, ведь, зная значения составных частей формулы, мы однозначно определяем её значение. Дело, однако, не так просто: почему мы думаем, что составные части могут быть определены по формуле однозначно? То есть, нам нужно следующее утверждение.

Теорема об однозначности анализа формул логики высказываний. Для любой формулы Θ логики высказываний выполнено ровно одно:

1. Θ — логическая константа,
2. Θ — логическое имя,
3. $\Theta = (\neg\Phi)$, и Φ однозначно определяется по формуле Θ,
4. $\Theta = (\Phi\tau\Psi)$, и τ, Φ, Ψ однозначно определяются по формуле Θ.

Естественно, в доказательстве теоремы мы должны использовать скобочную структуру формул — именно для этого скобки и нужны. Наиболее нетривиальная часть доказательства состоит в том, как в случае 4 найти, где кончается формула Φ. Идея — в том, что в любой формуле Φ число открывающих скобок равно числу закрывающих, а у любого начала Φ число открывающих — больше. Этот факт может быть доказан *индукцией по построению.* Детали — важное упражнение.

Конечно, обсуждаемая теорема относится к синтаксису, но мы почувствовали необходимость в ней в связи с обсуждением семантики и привели её здесь.

Если не фиксировать последовательность α, а рассматривать разные последовательности, то получим функцию $\mathbb{B}^{\omega} \to \mathbb{B}$, эту функцию мы и называем *значением формулы*. Пусть наибольший номер (индекс) переменной в формуле равен $n-1$. Тогда формула задает также функцию $\mathbb{B}^{n} \to \mathbb{B}$.

Предположим, что у нас имеется три логических переменных A_0, A_1, A_2, и мы рассматриваем различные комбинации их значений. Таких комбинаций восемь, 2^3. Пусть теперь имеется формула, например,

$$(A_0 \to \neg A_1) \wedge \neg(A_2 \vee A_0).$$

Чтобы найти соответствующую функцию, надо вычислить значение этой формулы на каждой из восьми цепочек α_0, α_1, α_2. Вычислять надо индукцией по построению, начиная с атомных формул.

A_0	A_1	A_2	$(A_0$	$\to$	$\neg$	$A_1)$	$\wedge$	$\neg$	$(A_2$	$\vee$	$A_0)$
0	0	0		1	1		**1**	1		0	
0	0	1		1	1		**0**	0		1	
0	1	0		1	0		**1**	1		0	
0	1	1		1	0		**0**	0		1	
1	0	0		1	1		**0**	0		1	
1	0	1		1	1		**0**	0		1	
1	1	0		0	0		**0**	0		1	
1	1	1		0	0		**0**	0		1	

Таблица функции. Построение функции по формуле. Под каждой логической связкой написано значение соответствующей подформулы. Под главной связкой (в данной формуле — это конъюнкция) — значение самой формулы (жирным шрифтом).

Наша формула — это конъюнкция двух формул. Строим таблицу функции для каждой из них, и т. д.

1.3. Построение формулы по функции. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма

Введем еще некоторые обозначения. Для обозначения дизъюнкции или конъюнкции многих членов используются те же самые способы записи, которые используются для длинных сумм $\sum a_i$ или произведений $\prod a_i$. Мы пишем знак дизъюнкции или конъюнкции, и некоторым образом задаётся список формул, между которыми стоит этот знак: $\vee\Phi_i$, $\wedge\Phi_i$.

Заметим, что операции конъюнкции и дизъюнкции, как и сложения и умножения, являются ассоциативными (и коммутативными), но можно считать, что при развёртывании указанных сокращений формулы упорядочены, а скобки расставляются некоторым стандартным образом. Удобно договориться, что для одноэлементных множеств соответствующие выражения означают просто этот элемент, конъюнкция пустого множества — это 1, дизъюнкция — 0.

Теперь посмотрим на некоторые специального вида формулы. Начнем с конъюнкций логических переменных и их отрицаний. Соответствующая функция принимает значение 1 только для одной комбинации переменных (в одной точке). Это очевидно. Например, где функция, задаваемая формулой $A_0 \wedge \neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3$ равна 1? — Только при значении $\langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle = \langle 1, 0, 0, 1 \rangle$.

Фиксируем натуральное число n. Обозначим
$\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$,
$A = A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$.
Далее, введем обозначения:
$(0, A_i) = \neg A_i$,
$(1, A_i) = A_i$,
$(\alpha, A) = \bigwedge(\alpha_i, A_i), \quad i = 0, \ldots, n-1$.

Теорема о дизъюнктивной нормальной форме. Всякая функция $f : B^n \to B$ задается формулой

$$\bigvee(\alpha, A), \quad \text{по всем } \alpha, \text{ для которых } f(\alpha) = 1.$$

Всякая формула указанного вида называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* — С.Д.Н.Ф.

Определение. *Тавтология* — формула, функция которой всюду равна 1.

Утверждение. Множество тавтологий разрешимо.
Доказательство. Построим таблицу…

1.4. Подстановка

Пусть w — произвольное слово. Подстановка слова u вместо буквы x в слове w — это одновременная замена всех вхождений x в w на u. Результат подстановки обозначается $w[u/x]$.

Лемма о подстановке. Пусть A и B — две формулы, x — имя и фиксирована некоторая интерпретация. Тогда, при этой интерпретации, $\text{Зн}A[B/x] = \text{Зн}A[\text{Зн}B/x]$.

Лемма о подстановке верна в разных ситуациях, когда мы рассматриваем значения индуктивно строящихся выражений. Её смысл в том, что значение выражения определяется значением компонентов, из которых оно построено, а не их внутренней структурой.

2. Модальные логики (начало)

Модальные логики первоначально вводились в попытке математически описать тонкости естественных языков и рассуждений, которые не удается прямолинейно выразить в той логике высказываний, которую мы только что рассматривали. Сейчас — это значительная область математической логики. В отличие от логики высказываний модальных логик много. Мы начнем с одной из них, которую и будем называть просто «модальная логика».

2.1. Синтаксис

Прежде всего, нам понадобится новая связка: $\Box$ — «необходимо». В индуктивное построение формулы логики высказываний добавляется еще одна возможность: если Φ — формула, то $\Box\,\Phi$ — тоже формула (читается «необходимо Φ»).

Индуктивное построение формул:
- Всякое имя — формула
- Если Φ, Ψ — формулы, $\tau \in \{\wedge, \vee, \to, \equiv\}$, то $(\neg\,\Phi)$, $\Box\,\Phi$, $(\Phi\,\tau\,\Psi)$ — формулы.

Для упрощения изложения мы не стали вводить логических констант, но могли бы и ввести.

2.2. Семантика

Мы начнём с содержательной интерпретации. Мы будем использовать те же, что и раньше, представления о логических значениях и смысле логических связок. Возможные содержательные «чтения» и «понимания» (интерпретации) выражения $\Box\,A$:
- Необходимо A
- Всегда A
- Должно быть A
- Известно, что A
- Считается, что A
- Утверждение A доказуемо
- После завершения программы выполнено A

Другие *модальности* (не похожие на необходимость):
- желательно, вероятно, запрещено, хорошо, удобно...
- Вероятностные логики, нечеткие логики, квантовые логики

Сами модальные логики и выражение с их помощью человеческого языка и мышления рассматривались ещё в 1920-е гг. Но ясная, применимая в различных ситуациях, и идейно простая формальная семантика была построена около 1958 года американским логиком Солом Крипке (13.11.1940 –).

Шкала Крипке — это пара $F = \langle S; R\rangle$, где
- S — непустое множество *миров*,
- $R \subseteq S \times S$ — отношение *достижимости* (второго мира из первого).

Интерпретация V каждое имя p отображает в множество миров, $V(p) \subseteq S$.

Значение формулы A в мире s шкалы F при интерпретации V строится индуктивно:
- $\mathsf{Зн}(p, s) = s \in V(p)$ (таким образом, $V(p)$ — это множество миров, в которых p истинна),
- $\mathsf{Зн}(\Box\,A, s) = \bigwedge \mathsf{Зн}(A, t)$, по всем t, достижимым из s (бесконечная конъюнкция — не формула, но аналогична конечной),
- остальное — как в логике высказываний.

Отношение $F, s, V \vDash A$. Читается *«формула A истинна в мире s шкалы F при интерпретации V»*.

Формула A *истинна в шкале* F, обозначение: $F \vDash A$, если она истинна в любом мире этой шкалы при любой интерпретации.

Формула *истинна*, если она истинна в любой шкале.

Естественно, мы хотим, чтобы понятие истинности соответствовало нашей интуитивной семантике. Интуитивно, идея «возможных миров» и достижимости выглядит подходящей. Далее возникает целый ряд вопросов. Как установить истинность? Существует ли для этого алгоритм, как в случае логики высказываний? Можно ли придумать какое-то исчисление, позволяющее устанавливать истинность? Если можно, то насколько естественными и обозримыми будут его правила? Мы попытаемся на некоторые из этих вопросов ответить на следующей лекции. Сейчас мы займёмся более детальным изучением истинности.

2.3. Свойства истинности

Для любой шкалы F и любых формул A и B выполнено:

1. Подстановка формул вместо имён сохраняет истинность (доказательство индукцией по построению).
2. $F \vDash \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$.
3. Если $F \vDash A$, то $F \vDash \Box A$.
4. Если $F \vDash A$ и $F \vDash A \to B$, то $F \vDash B$.

Доказательство.

1. Индукция по построению — определению значения. Значение формулы определяется значениями использованных подформул (как в Лемме о подстановке).
2. Возьмём какую-нибудь интерпретацию и мир s.
   Пусть посылка $\Box(A \to B)$ — истинна в s.
   Тогда $(A \to B)$ — истинна во всех достижимых из s мирах.
   Пусть посылка $\Box A$ — истинна.
   Тогда A истинна во всех достижимых из s мирах.
   Значит, B — истинна во всех достижимых из s мирах.
   Значит, $\Box B$ — истинна в s.
3. Формула A истинна во всех мирах, значит, во всех мирах, достижимых из данного.
4. Рассуждаем в данном мире при данной интерпретации.