

# **Введение в математическую ЛОГИКУ**

Лекция 9

**Утверждение, которое вы сейчас видите  
на экране, –  
*ЛОЖНО.***

# Формализация

- Утверждение в формальном языке, говорящее о собственной истинности

# Арифметики

Желаемое:

- Арифметика = Настоящие натуральные числа и операции
- Эта Арифметика полностью описывается Аксиомами
- Все свойства натуральных чисел могут быть выведены из Аксиом

# Арифметики

Реальность:

- Существует много арифметик, не изоморфных Настоящим натуральным числам (с операциями), но со всеми свойствами натуральных чисел.
  - обсуждалось раньше
- Не существует системы аксиом, из которых могут быть выведены все свойства натуральных чисел (и только они).
  - тема сегодня

# Кодирование

- При фиксированной сигнатуре – язык логики предикатов.
- Слова в алфавите языка логики предикатов кодируются в алфавите  $\{0, 1\}$ .  
Операция Код.
- При необходимости можно кодировать также последовательности слов.

# Модель М (вариант арифметики)

Область (носитель) – слова в алфавите  $\{0,1\}$ .

В сигнатуре есть  $0,1$  и операция приписывания слов, могут быть, кроме этого,  $+$ ,  $\times$  и др. Слова в алфавите  $\{0,1\}$  – термы (но могут быть и другие термы).

Выразима функция подстановки (можно обойтись без функций, используя только символы для отношений):

- Подст: Код слова, получаемого подстановкой в формулу, кодом которой является первый аргумент, второго аргумента вместо свободной переменной  $x$ .

# Гёделева диагональ

- $\Phi$  – формула с одной свободной переменной
- $\Gamma = \neg \Phi$  (Подст( $x, x$ ))
- $\Gamma$  (код  $\Gamma$ ) =  $\neg \Phi$  (Подст (код  $\Gamma$ , код  $\Gamma$ )) =  $\neg \Phi$  (код  $\Gamma$  (код  $\Gamma$ ))

**Теорема Тарского.** Не существует формулы  $\Phi$  в заданной сигнатуре, выражающей свойство: «быть кодом истинного в модели  $M$  утверждения».

**Д.** Предположим, такая формула  $\Phi$  существует.

- **Пусть:**  $\Gamma$  (код  $\Gamma$ ) – истинно. **Тогда:**  $\Phi$  (код  $\Gamma$  (код  $\Gamma$ )) – истинно,  
 $\neg \Phi$  (код  $\Gamma$  (код  $\Gamma$ )) – ложно,  
 $\Gamma$  (код  $\Gamma$ ) – ложно.
- **Пусть:**  $\Gamma$  (код  $\Gamma$ ) – ложно. **Тогда:**  $\Phi$  (код  $\Gamma$  (код  $\Gamma$ )) – ложно,  
 $\neg \Phi$  (код  $\Gamma$  (код  $\Gamma$ )) – истинно,  
 $\Gamma$  (код  $\Gamma$ ) – истинно.



# Гёделева диагональ

- $\Phi$  – формула с одной свободной переменной
- $\Gamma = \neg \Phi(\text{Подст}(x,x))$
- $\Gamma(\text{код } \Gamma) = \neg \Phi(\text{Подст}(\text{код } \Gamma, \text{код } \Gamma)) = \neg \Phi(\text{код } \Gamma(\text{код } \Gamma))$

Пусть в нашей модели  $M$  для всякого исчисления над алфавитом  $\{0,1\}$  выразимо свойство «быть кодом выводимого в этом исчислении слова».

**Теорема Гёделя.** Не существует исчисления, порождающего в точности истинные формулы в нашей модели.

Д. Пусть такое исчисление существует, и  $\Phi$  выражает свойство «быть кодом выводимого слова».

**Пусть:**  $\Gamma(\text{код } \Gamma)$  – истинна. **Тогда:** она выводима.

$\Phi(\text{код } \Gamma(\text{код } \Gamma))$  – истинно,

$\neg \Phi(\text{код } \Gamma(\text{код } \Gamma))$  – ложно,

$\Gamma(\text{код } \Gamma)$  – ложно.

**Пусть:**  $\Gamma(\text{код } \Gamma)$  – ложна. **Тогда:** она не выводима.

$\Phi(\text{код } \Gamma(\text{код } \Gamma))$  – ложно,

$\neg \Phi(\text{код } \Gamma(\text{код } \Gamma))$  – истинно,

$\Gamma(\text{код } \Gamma)$  – истинно.

# Соотношение с обычной арифметикой

- Сигнатура приписывания не менее естественна, чем сигнатура сложения и умножения.
- В рассматриваемой сигнатуре могут быть  $+$ ,  $\times$ .
- Подстановка и выводимость («быть кодом выводимой формулы») могут быть выражены через приписывание, а приписывание – через  $+$ ,  $\times$ .  
Приписывание несущественно расширяет арифметику.
- Более богатые теории, например, теория множеств, или теория, где имеется одноместное отношение.

# Естественные недоказуемые утверждения

- Важные теоремы и проблемы теории чисел, комбинаторики, математической логики, теории вычислений и т. д. можно формулировать в арифметике
- Постепенно для них удастся найти доказательства, решения и т. д.
- Теорема Геделя показывает, что иногда это может быть и не так – возможны утверждения, для которых доказательство или опровержение (в теории Пеано) не будет найдено никогда.

## Истинное, но не доказуемое в PA утверждение

# Червь Беклемишева

- *Червём* будем называть произвольную конечную последовательность натуральных чисел.
- *Нос* червя – последний элемент последовательности.
- *Голова* червя – максимальный конец последовательности (включая нос), все элементы которого не меньше носа.
- *Хвост* червя – оставшаяся начальная часть последовательности (хвост может быть пустым).
- В примерах голова – красная (нос – тёмно-красный), хвост – зелёный:

(а) 7 6 1 2 3 4 6 5 4

(б) 7 6 1 2 3 4 6 3 4

(в) 7 6 1 2 3 4 6 3 0 1 0 0 0

(г) 3 7 6 7 8 9 8 4 6 3 3 4 3

# Истинное, но не доказуемое в РА утверждение

## Эволюция червя

- Эволюция червя происходит по шагам. После каждого шага заново определяем, где у червя хвост, голова, нос.
- Если нос равен 0, то отрезаем его, и на следующем шаге последовательность становится на 1 короче.
- Если на  $(k-1)$ -м шаге нос не равен 0, то на  $k$ -м шаге к голове червя приделываем ещё  $k$  копий головы и в каждой из  $(k+1)$  копий нос уменьшаем на 1.

• Пример 1:

$$w_0 = 0$$

$$w_1 = \Lambda$$

Пример 2:

$$w_0 = 1$$

$$w_1 = 00$$

$$w_2 = 0$$

$$w_3 = \Lambda$$

# Истинное, но не доказуемое в PA утверждение Эволюция червя. Пример 3.

- $W_0 = 2$
  - $W_1 = 11$
  - $W_2 = 101010$
  - $W_3 = 10101$
  - $W_4 = 101000000$
  - $W_5 = 10100000$
  - $W_6 = 1010000$
  - $W_7 = 101000$
  - $W_8 = 10100$
  - $W_9 = 1010$
  - $W_{10} = 101$
  - $W_{11} = 10000000000000000000$
  - ...
- $W_{23} = 10$
  - $W_{24} = 1$
  - $W_{25} = 00^{25}$
  - ...
  - $W_{50} = 0$
  - $W_{51} = \Lambda$

# Истинное, но не доказуемое в РА утверждение Эволюция червя. Пример 4.

- $W_0 = 3$
- $W_1 = 2\ 2$
- $W_2 = 2\ 1\ 2\ 1\ 2\ 1$
- $W_3 = 212120\ 212120\ 212120\ 212120$
- $W_4 = 212120\ 212120\ 212120\ 21212$
- $W_5 = 212120\ 212120\ 212120\ 2121\ 111111$
- $W_6 = (212120)^3 (2121111110)^7$
- $W_7 = (212120)^3 (2121111110)^6 212111111$
- $W_8 = (212120)^3 (2121111110)^6 (2121111110)^9$
- $W_9 = (212120)^3 (2121111110)^6 (2121111110)^8 212111111$
- $W_{10} = (212120)^3 (2121111110)^6 (2121111110)^8 (212111110)^{11}$
- ...

## Истинное, но не доказуемое в PA утверждение

- **Утверждение.** Любой червь в процессе эволюции рано или поздно (но скорее поздно, чем рано) исчезнет (превратится в пустую последовательность).
- **Утверждение.** Предыдущее утверждение истинно, но не доказуемо в арифметике Пеано PA.

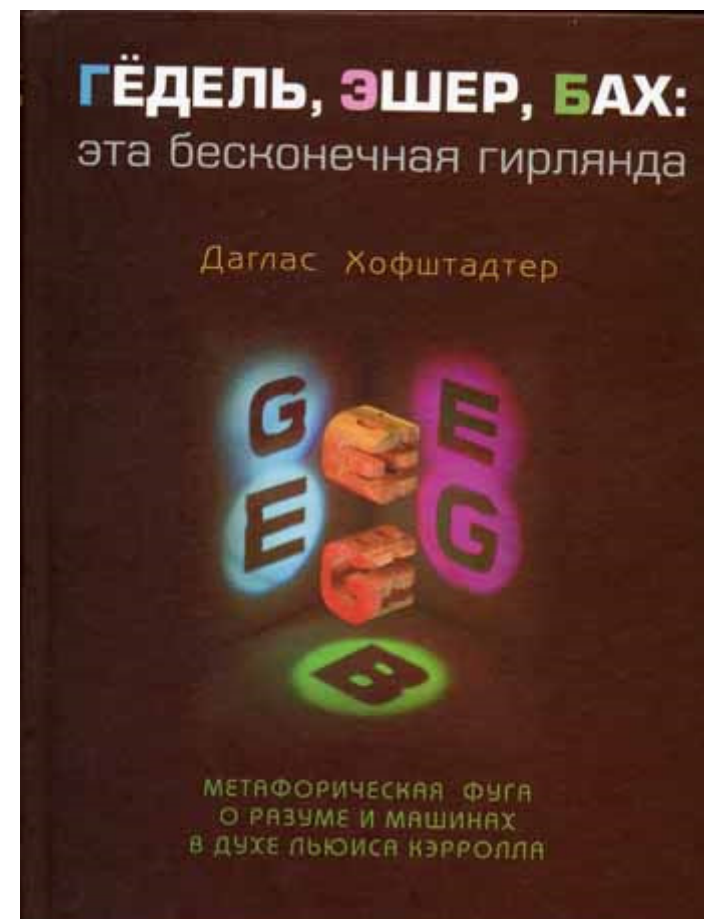


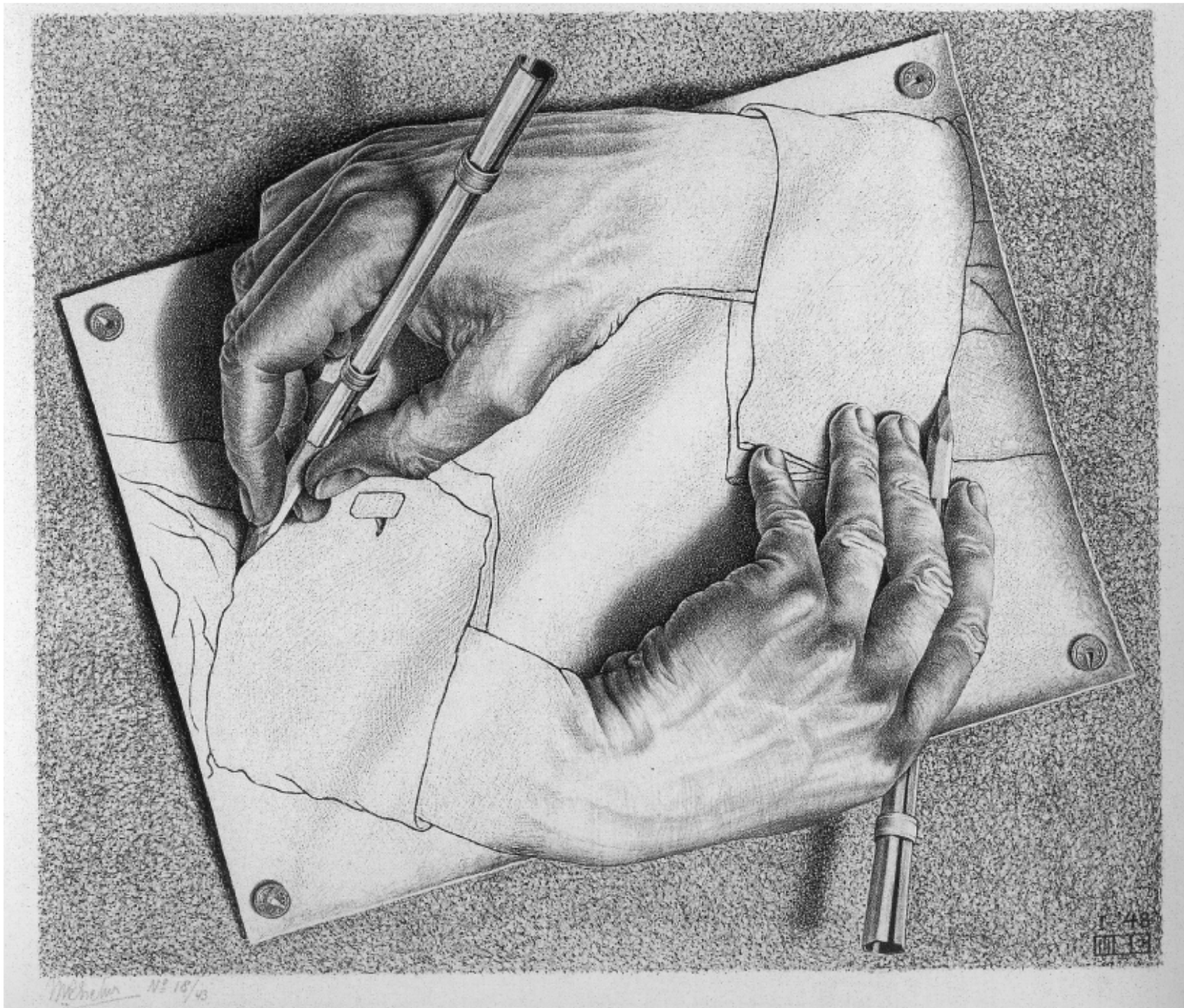
# Теорема Гёделя

- Пропасть между доказуемостью и истинностью, между математикой и реальностью



В 1999 году  
"Time magazine"  
провозгласил  
**Гёделя**  
самым великим  
математиком XX века  
и включил его в список  
"Ста великих людей  
столетия".





[http://www.youtube.com/watch?v=j4cYiCq\\_Hvc](http://www.youtube.com/watch?v=j4cYiCq_Hvc)