Введение в математическую логику

Лекция 6

Множество замкнутых формул (в какой-то сигнатуре) мы называем *теорией* или *системой аксиом*.

Если $M = \langle D, \Sigma, \mathbf{Зн} \rangle$ — структура с сигнатурой Σ, а Φ — замкнутая формула в той же сигнатуре, то $M \models \Phi$ означет, что формула Φ истинна в M.

Если формула $\Phi(x_0, \ldots, x_k)$ содержит свободные переменные, а $a_0, \ldots, a_k \in D$, то $M \models \Phi(a_0, \ldots, a_k)$ означает, что Φ истинна в M, если вместо переменных x_i подставлены элементы a_i. (Более формально: значение формулы Φ на любой бесконечной последовательности из D^ω, начинающейся с $a_0, \ldots, a_k$, равно 1 (истине), см. Лекцию 4.)

Структура M является моделью теории Γ, если $M \models \Phi$ для любой формулы $\Phi \in \Gamma$.

Замкнутая формула Φ *семантически следует* из теории Γ, если формула Φ истинна в любой модели теории Γ.

Будем обозначать семантическое следование аналогичным выражением: $\Gamma \models \Phi$.

Теории, у которых нет моделей, называются *противоречивыми.*

Теория Γ *полна*, если для любой замкнутой формулы Φ в той же сигнатуре выполнено $\Gamma \models \Phi$ или $\Gamma \models \neg\Phi$.

Γ_0: Равенство

Сигнатура: имя двуместного отношения $=$

$(\forall u(u = u))$

$(\forall u, v(u = v \to v = u))$

$(\forall u, v, w(u = v \land v = w \to u = w))$

Теория Γ является *теорией с равенством*, если (1) Γ содержит указанные аксиомы и (2) для каждого имени отношения P, входящего в Γ, имеется аксиома

$$(\forall u_0, \ldots, u_k, v_0, \ldots, v_k(u_0 = v_0 \wedge \cdots \wedge u_k = v_k \rightarrow \\ \rightarrow P(u_0, \ldots, u_k) \equiv P(v_0, \ldots, v_k)))$$

для каждого имени функции f, входящего в Γ, имеется аксиома

$$(\forall u_0, \ldots, u_k, v_0, \ldots, v_k(u_0 = v_0 \wedge \cdots \wedge u_k = v_k \rightarrow \\ \rightarrow f(u_0, \ldots, u_k) = f(v_0, \ldots, v_k)))$$

Модель M теории с равенством называется *нормальной*, если имени $=$ сопоставляется обычное равенство.

$M = \langle D, \Sigma, \mathbf{Зн} \rangle$ — модель теории Γ, двуместное отношение $R = \mathbf{Зн}(=)$ не совпадает с равенством. $\mathbb{D}$ — множество классов эквивалентности по R. Рассмотрим структуру $M' = \langle \mathbb{D}, \Sigma, \mathbf{Зн}' \rangle$.

$\mathbf{Зн}'(P)(A_0, \ldots, A_k) = 1 \Leftrightarrow \mathbf{Зн}(P)(a_0, \ldots, a_k) = 1$,
$a_i \in A_i$,

$\mathbf{Зн}'(f)(A_0, \ldots, A_k) = B \Leftrightarrow \mathbf{Зн}(f)(a_0, \ldots, a_k) = b$,
$a_i \in A_i, \quad b \in B$.

(1) определение корректно, (2) M' — нормальная структура, (3) для любой формулы $\Phi(x_0, \ldots, x_k)$

$M' \models \Phi(A_0, \ldots, A_k) \iff M \models \Phi(a_0, \ldots, a_k), a_i \in A_i$.

Γ_1: Плотный линейный порядок без первого и последнего элемента.

Сигнатура: имя двуместного отношения $<$

$(\forall u \neg (u < u))$

$(\forall u, v(u < v \vee v < u \vee u = v))$

$(\forall u, v, w((u < v \wedge v < w) \rightarrow u < w))$

$(\forall u, v(u < v \rightarrow (\exists w(u < w \wedge w < v))))$

$(\forall u(\exists v, w(v < u \wedge u < w)))$

Γ_2: Дискретный линейный порядок с наименьшим элементом.

Сигнатура: имя двуместного отношения $<$, имя константы 0.

Первые три аксиомы те же.

Следующие три аксиомы:

$$(\forall u(u = 0 \vee 0 < u))$$

$$(\forall u(\exists v(u < v \wedge (\forall w(u < w \to v = w \vee v < w)))))$$

$$(\forall u(u \neq 0 \to$$
$$\to (\exists v(v < u \wedge (\forall w(w < u \to w = v \vee w < v))))))$$

Q, Q^+ изоморфны: любое конечное монотонно возрастающее отображение $\psi\colon a_i \to b_i$ из Q в Q^+ может быть продолжено до изоморфизма.

Структуры M_1 и M_2 с одной и той же сигнатурой *элементарно эквивалентны* ($M_1 \equiv M_2$), если в них истинны одни и те же замкнутые формулы.

Теория структуры $\mathrm{Th}(M)$: множество замкнутых формул, истинных в структуре M.

Элементарная эквивалентность: $\mathrm{Th}(M_1) = \mathrm{Th}(M_2)$.

$\mathrm{Th}(M)$ всегда непротиворечива и полна.

Изоморфизм: $M_1 = \langle D_1, \Sigma, \mathbf{Зн}_1 \rangle$ и $M_2 = \langle D_2, \Sigma, \mathbf{Зн}_2 \rangle$,
$\psi\colon D_1 \to D_2$ — взаимно однозначно.

Для любых $a_0, \ldots, a_k \in D_1$

$$\mathbf{Зн}_1(P)(a_0, \ldots, a_k) \iff \mathbf{Зн}_2(P)(\psi(a_0), \ldots, \psi(a_k)),$$

$$\psi(\mathbf{Зн}_1(f)(a_0, \ldots, a_k)) = \mathbf{Зн}_2(f)(\psi(a_0), \ldots, \psi(a_k)).$$

Для любой формулы $\Phi(x_0, \ldots, x_k)$, $\quad a_0, \ldots, a_k \in D_1$ выполнено

$$M_1 \vDash \Phi(a_0, \ldots, a_k) \iff M_2 \vDash \Phi(\psi(a_0), \ldots, \psi(a_k)),$$

и, таким образом, изоморфные структуры элементарно эквивалентны.

Гомоморфизм $\psi\colon M_1 \to M_2$. $\psi(M_1)$ *подструктура* структуры M_2: подмножество, содержащее значения всех имен констант и замкнутое относительно всех значений имен функций (в M_2). M_1 *вложима в* M_2.

Пример: $\langle N, \{<\}, \mathbf{Зн}_N\rangle$ и $\langle Q, \{<\}, \mathbf{Зн}_Q\rangle$.

Подструктура M_1 структуры M_2 является *элементарной*, если для любой формулы $\Phi(x_0, \ldots, x_k)$ и любых элементов $a_0, \ldots, a_k \in M_1$ выполнено

$$M_1 \vDash \Phi(a_0, \ldots, a_k) \iff M_2 \vDash \Phi(a_0, \ldots, a_k).$$

Структура M_2 является *элементарным расширением* структуры M_1.

Элементарное расширение $\Rightarrow$ элементарная эквивалентность. Обратное неверно.

Критерий: подструктура M_1 *структуры* M_2 *является элементарной тогда и только тогда, когда для любой формулы* $\Phi(x_0, \ldots, x_k, y)$ *и любых элементов* $a_0, \ldots, a_k \in M_1$ *если*

$M_2 \models \Phi(a_0, \ldots, a_k, b)$ *для некоторого* $b \in M_2$, *то*

$M_2 \models \Phi(a_0, \ldots, a_k, b')$ *для некоторого* $b' \in M_1$.

M_2 – **элементарное расширение** M_1.

$M_2 \models \Phi(a_0, \ldots, a_k, b)$ для некоторого $b \in M_2 \Rightarrow$

$M_2 \models (\exists u \Phi(a_0, \ldots, a_k, u)) \Rightarrow$

$M_1 \models (\exists u \Phi(a_0, \ldots, a_k, u)) \Rightarrow$

$M_1 \models \Phi(a_0, \ldots, a_k, b')$ для некоторого $b' \in M_1 \Rightarrow$

$M_2 \models \Phi(a_0, \ldots, a_k, b')$.

Условие критерия выполнено.

$M_1 \models \Phi(a_0, \ldots, a_k) \iff M_2 \models \Phi(a_0, \ldots, a_k)$ для любой формулы Φ и для любых $a_0, \ldots, a_k \in M_1$.

Атомные формулы, $\{\neg, \wedge, \vee, \to, \equiv\}$ — очевидно.

$\Phi = (\forall u \Psi(x_0, \ldots, x_k, u))$ сводится к

$M_1 \not\models (\exists u \neg \Psi(a_0, \ldots, a_k, u)) \Leftrightarrow M_2 \not\models (\exists u \neg \Psi(a_0, \ldots, a_k, u))$.

$M_1 \models (\exists u \Psi(a_0, \ldots, a_k, u)) \Rightarrow M_1 \models \Psi(a_0, \ldots, a_k, b')$ для некоторого $b' \in M_1 \Rightarrow M_2 \models \Psi(a_0, \ldots, a_k, b') \Rightarrow M_2 \models (\exists u \Psi(a_0, \ldots, a_k, u))$.

$M_2 \models (\exists u \Psi(a_0, \ldots, a_k, u)) \Rightarrow M_2 \models \Psi(a_0, \ldots, a_k, b)$ для некоторого $b \in M_2 \Rightarrow$ (критерий) $M_2 \models \Psi(a_0, \ldots, a_k, b')$ для некоторого $b' \in M_1 \Rightarrow M_1 \models \Psi(a_0, \ldots, a_k, b') \Rightarrow M_1 \models (\exists u \Psi(a_0, \ldots, a_k, u))$.

Теорема Лёвенгейма – Сколема об элементарной подмодели. *Любая беконечная структура с конечной или счетной сигнатурой содержит счетную элементарную подмодель.*

$M_0 \subset M_1 \subset \ldots$ — счётные подмножества структуры M, $M' = \cup\{M_i\}$.

M_0 содержит значения всех констант.

Построение M_{i+1}:

(1) $f \in \Sigma, a_0, \ldots, a_k \in M_i \Rightarrow$ добавляем в M_{i+1} элемент $\mathbf{Зн}(f)(a_0, \ldots, a_k)$.

(2) $\Phi(x_0, \ldots, x_k, y)$ – формула, $a_0, \ldots, a_k \in M_i$, $M \models \Phi(a_0, \ldots, a_k, b)$ для некоторого $b \in M \Rightarrow$ добавляем в M_{i+1} один из таких элементов.

Несчётные сигнатуры: мощность сигнатуры α, на каждом шаге мы добавляем не более α элементов, построенная подмодель будет иметь мощность не более α.

Γ_1: Плотный линейный порядок без первого и последнего элемента.

Теория Γ_1 *полна:*

(1) все модели теории Γ_1 бесконечны,

(2) любые две счетные модели изоморфны,

(3) если $\Gamma_1 \cup \{\varphi\}$ непротиворечива, то имеется счётная модель.

Теория *категорична* в счётной мощности — все модели счётной мощности изоморфны.

Категоричность в какой-то мощности.

Признак Лося–Воота. *Непротиворечивая теория с конечной или счётной сигнатурой, не имеющая конечных моделей и категоричная в счётной мощности, полна.*

Непротиворечивая теория с конечной или счётной сигнатурой, не имеющая конечных моделей и категоричная в некоторой бесконечной мощности, полна.

Теорема компактности. *Если любое конечное подмножество теории непротиворечиво, то теория непротиворечива.*

Расширение структуры.

$M = \langle D, \Sigma, \mathbf{Зн} \rangle$, сигнатура Σ_M, содержит имена для всех элементов из D, сопоставление **Зн** естественно продолжено до $\mathbf{Зн}'$.

$\mathrm{Th}_M(M)$ — теория соответствующей структуры, M элементарно вложима в модели этой теории.

Новые имена констант $\{c_i\}$, $\Gamma = \mathrm{Th}_M(M) \cup \{c_i \neq c_j\}$, Γ непротиворечива (компактность).

Теорема Лёвенгейма – Сколема об элементарном расширении. *Для любой бесконечной структуры с конечной или счётной сигнатурой существует элементарное расширение сколь угодно большой мощности.*

$\mathbb{N} = \langle N, \{0, 1, <, +, \times\}, \mathbf{Зн}_0\rangle$ — натуральный ряд.

Нестандартная арифметика — модель $\mathbb{N}^*$ теории $\mathrm{Th}_{\mathbb{N}}(\mathbb{N}) \cup \{c \neq c_i | i \in N\}$,

нестандартные числа $N^* = \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$.

$c \in N^*$

$i < c, \quad i \in N$

$i < c \pm j, \quad i, j \in N$