

Введение в математическую логику

Лекция 11

Терминология

- Содержательная теория множеств
- Формальная теория множеств

Полные порядки

(Содержательная теория множеств)

- Линейный порядок на классе A называется *полным*, если в любом непустом подклассе класса A имеется наименьший элемент, то есть $B \subset A$, B непусто $\Rightarrow \exists u(u \in B \wedge \forall v(v < u \rightarrow v \notin B))$.

Класс A называется *вполне упорядоченным*.

- Эквивалентное определение – в A нет бесконечной убывающей цепочки $a_0 > a_1 > a_2 > \dots$.
- Примеры вполне упорядоченных классов:
 - конечный класс с любым линейным порядком,
 - класс натуральных чисел N .

Свойства полного порядка:

1. В A существует наименьший элемент -0 .
2. Непустой подкласс вполне упорядоченного класса вполне упорядочен.
3. Для каждого не наибольшего x существует единственный непосредственно следующий за ним элемент, то есть такой элемент y , что $x < y$, но не существует такого z , что $x < z < y$. Такой элемент y мы будем обозначать $x + 1$.
 - Элемент x , не являющийся наименьшим и не имеющий непосредственно предшествующего, называется *предельным*.
4. Всякий элемент вполне упорядоченного класса имеет вид n или $a + n$ для некоторого натурального n и предельного a .

Д. цепочка $x > x - 1 > x - 2 > \dots$ не может быть бесконечной.

Операции над упорядоченными классами

Если A и B — два упорядоченных класса, то $A \times B$ — это класс пар (a, b) , $a \in A$, $b \in B$, упорядоченный так:

$(a_0, b_0) < (a_1, b_1)$, если $a_0 < a_1$ или $a_0 = a_1$ и $b_0 < b_1$.

Если A и B — два непересекающихся упорядоченных класса, то $A + B$ — это класс $A \cup B$, порядок на котором задан так:

если $a \in A$, $b \in B$, то $a < b$,

если $a, b \in A$ ($a, b \in B$), то порядок определяется порядком на A (на B).

Свойства полного порядка (продолжение):

5. Если A и B — вполне упорядоченные классы, то классы $A + B$ и $A \times B$ вполне упорядочены.
6. Классы $N + k$, $N + N (= 2 \times N)$, $k \times N$, $N \times k$ вполне упорядочены, здесь класс k — конечный.

Начальные отрезки

- Подкласс B вполне упорядоченного класса A называется *начальным отрезком* A , если вместе с каждым элементом он содержит и все меньшие, то есть $a \in B, b < a \Rightarrow b \in B$.

Свойства полного порядка (продолжение):

7. $[0, a)$ и $[0, a]$ являются начальными отрезками.
 8. Любой начальный отрезок класса A , отличный от A , имеет вид $[0, a)$.
 9. Объединение любого семейства начальных отрезков является начальным отрезком.
- Подкласс B упорядоченного класса A *кофинален* классу A , если для любого $a \in A$ найдется такой $b \in B$, что $b \geq a$.

Трансфинитная индукция

- Индуктивные определения (при всех меньших...)
- Индуктивные доказательства (при всех меньших...)
- Варианты шага, в зависимости от того, предельный или не предельный элемент

Теорема о возрастающем отображении

Пусть A — вполне упорядоченный класс, $f: A \rightarrow A$ — возрастающее отображение, то есть $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.

Тогда $f(a) \geq a$ для всех $a \in A$,

образ $f(A)$ кофинален A .

Д. Пусть a — наименьший элемент для которого $a > f(a)$. Тогда $f(a) > f(f(a))$ (возрастание f), т.е. $f(a)$ обладает тем же свойством и меньше a , противоречие.

Теорема о вложении полных порядков

- Пусть A и B — два вполне упорядоченных класса. Тогда или A изоморфно некоторому начальному отрезку B , или B изоморфно некоторому начальному отрезку A , причем этот изоморфизм единствен.

Изоморфизм тут тоже класс, а не функция!

Теорема о вложении полных порядков

Д. Назовем начальный отрезок I класса A *корректным*, если он изоморфен некоторому начальному отрезку класса B . Пусть I — корректный отрезок, а f_I — соответствующий изоморфизм на I .

• Для любого $a \in I$ $f_I([0, a))$ — начальный отрезок класса B . Значит:

$f_I(a) =$ *наименьший элемент* $\{b \mid b \in B, b \neq f_I(a') \text{ для всех } a' < a\}$.

Поэтому $f_I(a)$ полностью определяется значениями f_I на меньших элементах. Кроме того, $f_I(0) = 0$. Отсюда по трансфинитной индукции следует, что такой изоморфизм единствен.

• Если J — начальный отрезок класса A , $J \subset I$, то J тоже корректный и (из единственности) $f_J = f_I$ на J .

• Пусть отрезок I_0 — объединение всех корректных начальных отрезков. Он корректен, поскольку отображение f — объединение всех f_I — будет требуемым изоморфизмом.

• Если $A = I_0$ или $B = f(I_0)$, то все доказано.

• Если $I_0 = [0, a)$ для некоторого $a \in A$ и $f(I_0) \neq B$, то доопределим отображение f на a , как *наименьший элемент класса* $B \setminus f(I_0)$, получим противоречие с тем, что отрезок $[0, a]$ уже не корректный.

Порядок на вполне упорядоченных классах

Следствие. Любой подкласс B вполне упорядоченного класса A изоморфен начальному отрезку класса A .

Д. Класс A не может быть изоморфен собственному начальному отрезку B , поскольку такой отрезок не кофинален A . ← Теорема о монотонном отображении

О. Класс A меньше класса B ($A < B$), если A изоморфно собственному начальному отрезку B .

Для любого A неверно $A < A$, поскольку требуемый изоморфизм единствен.

Любые два класса A, B или изоморфны, или $A < B$ или $B < A$.

В любом непустом семействе вполне упорядоченных классов есть "наименьший элемент", изоморфный начальному отрезку любого другого элемента семейства.

Д. Пусть A – элемент семейства и он не "наименьший", то есть найдется элемент семейства, изоморфный $[0, a)$ для некоторого $a \in A$.

Найдем наименьший среди таких элементов – a' . Элемент, изоморфный $[0, a')$, будет наименьшим в семействе.

В теории ZF

Множество $R \subset a \times a$ – порядок на множестве a , если задаваемое им отношение:

(1) антисимметрично: $\forall u(u \in a \rightarrow \neg R(u, u))$,

(2) транзитивно: $\forall u, v, w (R(u, v) \wedge R(v, w) \rightarrow R(u, w))$.

• Вместо $R(u, v)$ будем писать $u < v$.

Порядок *линеен*, если

(3) $\forall u, v (u \in a \wedge v \in a \rightarrow (u = v \vee u < v \vee v < u))$.

Порядок *фундирован*, если

(4) $\forall u (u \subset a \wedge u \neq \emptyset \rightarrow \exists v (v \in u \wedge \forall w (w < v \rightarrow w \notin u)))$.

Полный порядок – (1) – (4).

Функция выбора

О. Пусть a — множество, а f — такая функция, что $Dom(f) = P(a) \setminus \{\emptyset\}$, $Ra(f) \subset a$.

Тогда f — функция выбора для множества a , если $f(x) \in x$ для любого $x \subset a$, $x \neq \emptyset$.

Если множество может быть вполне упорядочено, то для него есть функция выбора: в множестве x выбираем наименьший элемент.

Теорема Цермело. Если для множества существует функция выбора, то оно может быть вполне упорядочено.

Д. Пусть a — некоторое множество, f — функция выбора для a .

О. Определим функцию (дополнит. выбора) $g: P(a) \setminus \{a\} \rightarrow a$ так, что $g(x) = f(a \setminus x)$, тогда $\forall u (u \subset a \wedge u \neq a \rightarrow g(u) \in a \setminus u)$.

О. Пусть b — подмножество a , $<_b$ — порядок на b . Пара $\langle b, <_b \rangle$ корректна, если

(1) порядок $<_b$ полный и

(2) $\forall u (u \in b \rightarrow u = g(\{v \mid v \in b, v <_b u\}))$ (то есть

порядок $<_b$ «согласован» с функцией g).

Лемма. Корректные пары согласованы, то есть, если $\langle b, <_b \rangle$ и $\langle c, <_c \rangle$ — две корректные пары, то одна из них является начальным отрезком другой.

Д. По теореме о вложении полных порядков существует изоморфизм h , отображающий (например) множество b на начальный отрезок c . Докажем, что тогда $h(x) = x$ трансфинитной индукцией по элементам b .

Ясно, что h переводит наименьший элемент b в наименьший элемент c , то есть $h(g(\emptyset)) = g(\emptyset)$.

Пусть d — произвольный элемент множества b , и отрезки $[0, d)$ и $[0, h(d))$, как и отношения $<_b$ и $<_c$ на них, по индуктивному предположению совпадают.

Но $d = g(\{x \mid x <_b d\})$ и $h(d) = g(\{x \mid x <_c h(d)\})$, значит $d = h(d)$.
Лемма доказана.

Теорема Цермело. Если для множества существует функция выбора, то оно может быть вполне упорядочено.

Продолжение доказательства.

- Пусть $S = \{ \langle b, r \rangle \mid \langle b, r \rangle \text{ — корректная пара} \}$.
- $U = \bigcup \{ b \mid \exists u (\langle b, u \rangle \in S) \}$, порядок на U –
 $x < y \Leftrightarrow x <_b y$ для некоторого порядка $\langle b, <_b \rangle \in S$.
- Это полный порядок, поскольку если $x \subset U$, $x \neq \emptyset$, то $x \cap b \neq \emptyset$ для некоторого b , и наименьший (в смысле порядка $<_b$) элемент в этом пересечении будет наименьшим элементом x .
- Если $U \neq a$, то доопределим порядок на $U \cup \{g(U)\}$, положив $x < g(U)$ для любого $x \in U$.
- Получим корректную пару, что противоречит определению U .

Аксиома выбора

Для любого множества существует функция выбора, формально:

$$\forall u \exists f (Func(f) \wedge Dom(f) = P(u) \setminus \{\emptyset\} \wedge \forall v (v \in Dom(f) \rightarrow f(v) \in v)).$$

- Теория, полученная добавлением к **ZF** аксиомы выбора, обозначается **ZFC**.
- С этого момента мы рассматриваем модели этой теории.