Введение в математическую логику
Лекция 10

Теория множеств Цермело – Френкеля **ZF**

Сигнатура $\mathbf{ZF} = \{=, \in\}$

Мы будем использовать запись $a \in b$.

Описываемая структура – класс всех ”чистых” множеств.

Аксиомы ZF

Аксиома объемности

$$\forall u, v(\forall w(w \in u \equiv w \in v) \to u = v)$$

Стоит ли для каждой формулы $\Phi(x)$ добавить аксиому $\exists s(\forall v(v \in s \equiv \Phi(v)))$?

$$\exists s(\forall v(v \in s \equiv \Phi(v)))$$

$$\Phi(x) = x \notin x$$

$$\exists s(\forall v(v \in s \equiv v \notin v)$$

$$s \in s \Leftrightarrow s \notin s$$

– парадокс Рассела.

$\{x | x \notin x\}$ – не множество.

Аксиомы ZF

Четыре типа аксиом существования множеств

Аксиомы подмножеств

$$\forall \bar{t} \forall u \exists s \forall v (v \in s \equiv (v \in u \wedge \Phi(\bar{t}, v)))$$

для любой формулы $\Phi(\overline{x}, y)$.

$\{x | x \in a \wedge \Phi(\bar{b}, x)\}$ – множество.

Аксиомы ZF

Аксиомы замены

$$\forall \bar{t}(\forall u \exists v \forall w (w \in v \equiv \Phi(\bar{t}, u, w)) \to$$
$$\to \forall v \exists s \forall w (\exists u (u \in v \wedge \Phi(\bar{t}, u, w)) \equiv w \in s))$$

для любой формулы $\Phi(\overline{x}, y, z)$.

$\forall u(\{z | \Phi(\bar{b}, u, z)\}$ – множество$)$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow \{z | \exists u(u \in a \wedge \Phi(\bar{b}, u, z))\}$ – множество.

Аксиомы ZF

Аксиома степени

$$\forall u \exists s \forall v (\forall w (w \in v \to w \in u) \equiv v \in s)$$

$x \subset y \Leftrightarrow \forall u (u \in x \to u \in y)$

$\{x | x \subset a\}$ – множество

Аксиомы ZF

Аксиома бесконечности

$$\exists s(\exists u(u \in s \land \forall v(v \notin u)) \land \forall u(u \in s \to$$
$$\to \exists v(v \in s \land \forall w(w \in v \to (w \in u \lor w = u)))))$$

Аксиомы ZF

Аксиома регулярности (фундирования)

$$\forall u(\exists v(v \in u) \to \exists v(v \in u \land \neg\exists w(w \in v \land w \in u)))$$

Аксиомы ZF

Аксиома пустого множества

$$\exists s \forall u (u \notin s)$$

Аксиома пары

$$\forall u, v \exists s \forall w (w \in s \equiv (w = u \vee w = v))$$

$\{x | x = a \vee x = b\}$ – множество

Предварительные замечания и соглашения

"Содержательная" и "формальная" теория множеств

Модель теории **ZF**

$\vdash$ **vs.** $\models$ (теорема о полноте)

Множество, подмножество, функция **vs.** класс, набор, совокупность, подкласс, отображение

$\exists! u \Phi(u)$ сокращение $\exists u(\Phi(u) \wedge \forall v(\Phi(v) \rightarrow u = v))$

$\mathbf{ZF} \vdash \exists! s \forall u (u \notin s)$

Пустое множество $\varnothing$

$\varnothing \in x$ сокращение для $\exists u (\forall v (v \notin u) \wedge u \in x)$ или $\forall u (\forall v (v \notin u) \to u \in x)$.

Если $\mathbf{ZF} \vdash \forall \overline{u} \exists! v \Phi(\overline{u}, v)$, то можно ввести $\varphi(\overline{x})$.

$y \in \varphi(\overline{x})$ сокращение для $\exists u (\Phi(\overline{x}, u) \wedge y \in u)$ или $\forall u (\Phi(\overline{x}, u) \to y \in u)$.

$y = \varphi(\overline{x}) \Leftrightarrow \Phi(\overline{x}, y)$

$\mathbf{ZF} \vdash \forall u \exists ! s \forall v (v \subset u \equiv v \in s)$

$P(x) = y \Leftrightarrow \forall v (v \subset x \equiv v \in y)$

$P(x)$ – множество подмножеств x

$\mathbf{ZF} \vdash \forall u, v \exists ! s \forall w (w \in s \equiv (w = u \vee w = v))$

$\{x, y\}$ – (неупорядоченная) пара множеств x и y

$\{x\}$ – обозначение для $\{x, x\}$

$Un(x) = \{y | \exists u(y \in u \wedge u \in x)\}$ – *объединение* множества x

$\mathbf{ZF} \vdash \forall v \exists s \forall w(\exists u(u \in v \wedge w \in u) \to w \in s)$ (аксиома замены)

$x \cup y$ – сокращение для $Un(\{x, y\})$

$x \cap y$ – *пересечение*: $\{z | z \in x \wedge z \in y\}$

$x \setminus y$ – *разность*: $\{z | z \in x \wedge z \notin y\}$

$< x, y >$ – *упорядоченная пара*: $\{\{x\}, \{x, y\}\}$

$$< x, y >=< x', y' > \Leftrightarrow x = x' \wedge y = y'$$

Упорядоченная тройка $< x, y, z >=< x, < y, z >>$

Декартово произведение
$x \times y = \{z \mid \exists u, v(u \in x \wedge v \in y \wedge z =< x, y >)\}$

$a \in x \times y \Rightarrow a \in P(P(x \cup y))$

Функция f $(Func(f))$: множество пар $< a, b >$
$\forall u, v, w(< u, v >\in f \wedge < u, w >\in f \to v = w)$
Область определения $(Dom(f)) =$
$= \{z \mid \exists u(< z, u >\in f)\}$
Область значения $(Ra(f)) = \{z \mid \exists u(< u, z >\in f)\}$
Инъективная функция $(IFunc(x))$
$f(x) = y \Leftrightarrow< x, y >\in f$

Множество натуральных чисел (ω)

$0; 1; 2; \ldots$ – $\varnothing; \{\varnothing\}; \{\varnothing, \{\varnothing\}\}; \ldots$

Следующий элемент: $S(x) = x \cup \{x\}$

$\mathbf{ZF} \vdash \exists s(\varnothing \in s \wedge \forall u(u \in s \to S(u) \in s))$

$$\omega = \{x \mid \forall s((\varnothing \in s \wedge \forall u(u \in s \to S(u) \in s)) \to x \in s)\}$$

Индукция: $\mathbf{ZF} \vdash \forall u(u \subset \omega \wedge u \neq \varnothing \to$
$\to (0 \in u \vee \exists v(v \in \omega \wedge v \notin u \wedge S(v) \in u)))$

Д-во. $a \subset \omega; b = \omega \setminus a;$
$0 \in b \wedge \forall u(u \in b \to S(u) \in b) \Rightarrow \omega \subset b$

$x < y \Leftrightarrow x \in y$; $S(m) = m \cup \{m\}$

(0) $n = 0 \vee n = S(m)$ (индукция)

(1) $n < S(n)$ (определение)

(2) $x \in n \rightarrow x \subset n$
Д-во. $x \in S(m) \Rightarrow x \in m$ или $x = m$

(3) порядок транзитивен: $n < m \wedge m < k \rightarrow n < k$ (2)

(4) $\neg(n < n)$ (индукция или аксиома регулярности)

(5) $0 < S(n)$ (индукция)

(6) $n < m \rightarrow m = S(n) \vee S(n) < m$ (индукция по m)

(7) порядок линеен: $n < m \vee n = m \vee m < n$
Д-во. $n = S(m)$, n не сравним с k; $k < m, k = m \Rightarrow k < n$ (3); $m < k \Rightarrow n$ сравнимо с k (6)

Рекурсия

Сложение – функция $\Sigma\colon \omega \times \omega \to \omega$

(0) $\Sigma(< n, 0 >) = n$

(1) $\Sigma(< n, m + 1 >) = \Sigma(< n, m >) + 1$

Существование и единственность доказываются по индукции.

Умножение и пр. Q, R.