РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКУЮ ЛОГИКУ

Направление подготовки

МАТЕМАТИКА

Профиль подготовки: все профили

Квалификация (степень) выпускника

Бакалавр, дипломированный специалист

Форма обучения

очная

г. Москва – 2011 г.

1. **Цели освоения дисциплины**

Целями освоения дисциплины (модуля) "Математическая логика" являются: формирование логической и математической культуры студента, освоение общих содержательных математических понятий доказательства и вычисления, их формализации и основных свойств; начальная фундаментальная подготовка в области математической логики и теории алгоритмов, включая теорию сложности, овладение их современным математическим аппаратом для дальнейшего использования в приложениях.

2. **Место дисциплины в структуре ООП ВПО**

Математическая логика входит в цикл профессиональных дисциплин в базовой части. Для ее успешного изучения не требуются знания и умения, выходящие за рамки общего образования.

Знание математической логики может существенно помочь в научно-исследовательской работе.

3. **Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля):** ОК-5, ОК-6, ОК-8, ОК-11, ПК-1, ПК-2, ПК-3, ПК-4, ПК-5, ПК-6, ПК-7, ПК-8, ПК-9, ПК-10, ПК-11, ПК-12, ПК-15, ПК-16, ПК-19, ПК-20, ПК-21, ПК-22, ПК-23, ПК-24, ПК-25, ПК-27, ПК-29.

В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ОБУЧАЮЩИЙСЯ ДОЛЖЕН:

1) Знать: основные понятия математической логики и теории алгоритмов, определения и свойства математических объектов в этой области, формулировки утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений.

2) Уметь: решать задачи вычислительного и теоретического характера в области математической логики и теории алгоритмов, доказывать утверждения из этой области.

3) Владеть: математическим аппаратом логики и теории алгоритмов, методами решения задач и доказательства утверждений в этой области.

4. **Структура и содержание дисциплины.**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3-4 зачетные единицы.

№	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов, и трудоемкость (в часах)				Формы текущего контроля успеваемости *(по неделям семестра)* Форма промежуточной аттестации *(по семестрам)*
				Лек	Кон	Сам	Сумм	
1	Основной предмет математической логики: математические доказательства и математические вычисления. Г.Фреге, Д.Гильберт. Программа Гильберта обоснования математики. Проблемы математической логики среди Проблем Гильберта. Исчисление. Алфавит, буква, слово, язык. Выводимость в грамматике. Индуктивные определения. Синтаксис и	2	1	2	2/0	4	8/6	

	семантика Интерпретации. Термы. Грамматики. Породимые множества Общее понятие исчисления. «Тезис Гильберта».							
2	Кодирование слов в различных алфавитах двоичными словами. Кодирование пар и кодирование последовательностей слов двоичными словами. Общие содержательные понятия алгоритма, вычислимой функции, перечислимого множества, разрешимого множества; простейшие свойства этих объектов. Алгоритмические проблемы. 10-я проблема Гильберта. Алгоритмы Маркова («нормальные алгорифмы»). Тезис Чёрча.	2	2	2	0/2	4	6/8	
3	Универсальный алгоритм. Диагональ несчетности (Кантора). Диагональ невычислимости. Логика высказываний. Логические связки: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность. Скобки. Индуктивное определение формулы. Таблица функции. Построение функции по формуле. ДНФ. СДНФ.	2	3	2	2/0	4	8/6	
4	Отношения и предикаты. Логика предикатов. Сигнатура. Термы. Модели (алгебраические системы). Кванторы всеобщности и существования. Свободные и связанные переменные. Выразимость. Общезначимость. Выполнимость.	2	4	2	0/2	4	6/8	
5	Поле действительных чисел как модель. Алгебраические и полуалгебраические множества. Теорема Тарского – Зайденберга. Элиминация кванторов и алгоритм разрешения для теории действительных чисел, следствие для элементарной геометрии.	2	5	2	2/0	4	8/6	
6	Теории и их модели. Полнота и непротиворечивость теории. Семантическое следование. Аксиомы равенства. Нормальные модели. Плотный линейный порядок. Дискретный порядок.	2	6	2	0/2	4	6/8	Контрольная работа

	Изоморфизм и вложение моделей. Элементарная эквивалентность моделей. Элементарное расширение. Критерий элементарного расширения. Теорема Лёвенгейма – Сколема об элементарной подмодели. Замечание о термине «элементарный». Категоричная теория. Признак Лося – Воота. Теорема Лёвенгейма – Сколема об элементарном расширении. Примеры категоричных и некатегоричных теорий упорядоченных множеств.							
7	Соответствие Галуа между классами моделей и теориями. Нестандартные арифметики. Операции на линейных порядках. Галактики, структура порядка на них. Автоморфизмы моделей и доказательства не выразимости. Описание одноместных отношений, выразимых в порядке на натуральных числах. Классификация Семенова отношений, выразимых в порядке на рациональных числах.	2	7	2	2/0	4	8/6	
8	Частные случаи тавтологий логики высказываний в логике предикатов. Исчисление предикатов: аксиомы и правила вывода, выводы. Корректность исчисления предикатов. Теорема Геделя о полноте исчисления предикатов (без доказательства). Выводимость в теории. Свойства выводимости. Эквивалентность теорий. Теорема дедукции. Теорема компактности Мальцева. Предваренная нормальная форма (семантическое доказательство). Арифметика Пеано.	2	8	2	0/2	4	6/8	
9	Парадокс лжеца. Кодирование формул и их последовательностей. Модели с выразимостью подстановки. Гёделева диагональ.	2	9	2	2/0	4	8/6	

	Теорема Тарского о невыразимости арифметической истины. Модели с выразимостью выводимости. Теорема Гёделя о неполноте. Истинные, но не доказуемые в Арифметике Пеано утверждения; червь Беклемишева.							
10	Аксиоматическая теория множеств. Построение множества натуральных чисел.	2	10	2	0/2	4	6/8	
11	Ординалы. Вполне упорядоченные множества. Аксиома выбора. Теорема Цермело.	2	11	2	2/0	4	8/6	
12	Теоремы независимости в теории множеств (без доказательства).	2	12	2	0/2	4	6/8	
13	Сложность вычислений. Существование универсальных переборных задач. Проблема перебора.	2	13	2	2/0	4	8/6	
14	Сложность описаний. Определение и теорема Колмогорова. Теорема Мучника о невыделимости общей информации (без доказательства).	2	14	2	0/2	4	6/8	
15	Модальная логика. Аксиоматика, модели Крипке.	2	15	2	2/0	4	8/6	
16	Обзор содержания курса.	2	16	2	0/2	4	6/8	
								Экзамен
	Всего			**32**	**16**	**64**	**112**	

5. Образовательные технологии:

активные и интерактивные формы, проекционные технологии.

6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

В течение семестра студенты решают задачи, указанные преподавателем, к каждому семинару. Проводится 1 контрольная работа (на семинаре).

Контрольная работа

1. Будет ли такая формула тождественно истинной:
   $p \to (p \wedge q) \vee \neg (p \to q)$?
2. Описать с точностью до эквивалентности все такие формулы $A=A(p,q)$, для которых
   $((p \wedge q) \to A) \to (\neg A \wedge p)$ тождественно истинна.
3. Привести к дизъюнктивной и конъюнктивной форме формулу $(p \to q) \oplus (q \wedge \neg r)$, где $\oplus$

означает сложение по модулю два.

4. Выразить булеву функцию $(x \mid y) = \neg(x \wedge y)$ через $(x \downarrow y) = \neg (x \vee y)$.
5. Предикатный символ *D(x,y)* интерпретируется на множестве натуральных чисел *N* как *«x делитель y»*, + интерпретируется стандартно. Записать формулами языка I-го порядка в сигнатуре {+, D} условия «x=0» и «x=2».
6. Привести к предваренному виду формулу
   $\forall x (\forall z (z < x \to P(z)) \to P(x)) \to \forall x P(x)$.
   Будет ли эта формула истинной на множестве натуральных чисел, когда < интерпретируется стандартно, а P(x) означает произвольное свойство натуральных чисел?

Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины.

а) Основная литература:

1. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1984.
2. Успенский В. А., Верещагин Н. К., Плиско В. Е. Вводный курс математической логики. М.: Физматлит, 2002.
3. Колмогоров А. Н., Драгалин А. Г. Математическая логика. М.: УРСС, 2004.
4. Лавров И. А., Максимова Л. Л. Задачи по математической логике, теории множеств и теории алгоритмов. М.: Физматлит, 2004.
5. Клини С. К. Математическая логика. М.: Мир, 1973.
6. Верещагин Н. К., Шень А. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2. Языки и исчисления. М.: МЦНМ, 2000
7. Верещагин Н. К., Шень А. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 3. Вычислимые функции. М.: МЦНМ, 1999.
8. Крупский В. Н., Плиско В. Е. Теория алгоритмов. М.: Издательский центр «Академия», 2009.
9. Шёнфилд Дж. Математическая логика. М.: Наука, 1975.

б) Дополнительная литература:

1. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977.
2. Архангельский А. В. Канторовская теория множеств. М.: Изд-во МГУ, 1988.
3. Булос Дж., Джеффри Р. Вычислимость и логика. М.: Мир, 1994.
4. Гиндикин С. Г. Алгебра логики в задачах. М.: Наука, 1972.
5. Гладкий А. В. Математическая логика. М.: РГГУ, 1998.
6. Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. 2-е изд., испр. и доп. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.
7. Логический подход к искусственному интеллекту: От модальной логики к логике баз данных / Тейз А., Грибомон П., Юлен Г. и др. М.: Мир, 1998.
8. Столл Р. Множества, логика, аксиоматические теории. М.: Просвещение, 1968.
9. Фейс Р. Модальная логика. М.: Наука, 1974.
10. Чень Ч., Ли Р. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. М.: Наука, 1983.
11. Чёрч А. Введение в математическую логику. М.: ИЛ, 1960.

в) Программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

1. Крупский В. Н. Лекции по теории алгоритмов для первого курса мехмата (2004).
http://lpcs.math.msu.su/~krupski/download/mm1/lect_kru.pdf,
http://lpcs.math.msu.su/~krupski/download/mm1/lect_kru.ps
2. Крупский В. Н. Подборка задач по теории алгоритмов.
http://lpcs.math.msu.su/~krupski/download/mm1/zad_alg.pdf,
http://lpcs.math.msu.su/~krupski/download/mm1/zad_alg.ps
3. Плиско В. Е. Математическая логика: Курс лекций.
http://lpcs.math.msu.su/~plisko/matlog.pdf,
http://lpcs.math.msu.su/~plisko/matlog.ps
4. Плиско В. Е. Теория алгоритмов: Курс лекций.
http://lpcs.math.msu.su/~plisko/ta.pdf, http://lpcs.math.msu.su/~plisko/ta.ps
5. Bilaniuk S. A Problem Course in Mathematical Logic. (2003)
http://www.trentu.ca/mathematics/sb/pcml/

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

Доступ студентов к компьютеру с Microsoft Office или аналогичным программным обеспечением.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО с учетом рекомендаций и ПрООП ВПО по направлению и профилю подготовки _____
____ .

Автор: чл.-корр. РАН А. Л. Семёнов
Рецензент(ы) ____

Программа одобрена на заседании ________________________________

(Наименование уполномоченного органа вуза (УМК, НМС, Ученый совет)
от ___________ года, протокол № ________.