Введение в математическую логику

Лекция 7

Напомним некоторые определения и обозначения. Основным отношением для нас является истинность замкнутой формулы в некоторой структуре (модели). А именно, пусть $\Sigma = \langle Ob, Fun, Pr\rangle$ — сигнатура, Φ — замкнутая формула в этой сигнатуре, а M — структура с данной сигнатурой. Тогда выражение $M \vDash \Phi$ означает, что формула Φ истинна в M. Для краткости замкнутые формулы мы будем называть *утверждениями*.

Множество утверждений (в какой-то сигнатуре) мы называем *теорией*. Если ϕ — некоторая теория, а M — структура с той же сигнатурой, то выражение $M \vDash \phi$ означает, что $M \vDash \Phi$ для любого утверждения $\Phi \in \phi$. Структура M, для которой выполнено $M \vDash \phi$ называется *моделью теории* ϕ.

Теории естественно использовать для описания разных классов структур (моделей).

Пусть m — некоторый класс моделей, тогда через $Th(m)$ мы обозначим теорию этого класса: множество всех утверждений, выполненных на всех моделях из m. В тех случаях, когда класс содержит лишь одну модель M мы вместо $Th(\{M\})$ будем писать $Th(M)$.

Обратно, пусть ϕ — некоторая теория. Сопоставим ей множество структур $Mod(\phi)$ — класс всех моделей этой теории. Из определений легко следует, что если m — класс структур, а ϕ — теория, то

$$m \subseteq Mod(\phi) \iff Th(m) \supseteq \phi$$

то есть пара отображений Th и Mod задает анти-монотонное соответствие Галуа.

Теоремы Лёвенгейма — Сколема об элементарном расширении и элементарной подструктуре утверждают, что для счётных сигнатур класс $Mod(\phi)$ должен быть достаточно сложным: если этот класс содержит хоть одну бесконечную модель, то он содержит и модель произвольной бесконечной мощности. Это, в частности, свидетельствует об ограниченности нашего языка — языка логики предикатов. У нас нет возможности, например, описать в этом языке бесконечную структуру со счётной сигнатурой с точностью до изоморфизма. Логику предикатов, называют также *логикой первого порядка*. Иногда эту логику и ее язык называют *элементарными*, поскольку в этом языке допускаются кванторы по элементам структуры. Это название отражено в терминах "элементарная эквивалентность", "элементарное расширение" и пр.

Мы могли бы рассмотреть неэлементарные языки, разрешив использовать переменные и для множеств, отношений и функций, то есть позволив использовать формулы вида "Существует подмножество, такое что ..." и пр. Выразительная сила таких языков существенно превосходит выразительную силу языка логики первого порядка. Такие языки называются *языками второго порядка*. Однако обсуждение таких языков выходит за рамки нашего курса.

Прошлый раз мы остановились на обсуждении арифметики, то есть теории структуры $\mathbb{N} = \langle N, \{0, 1, <, +, \times\}, \mathbf{Зн}_0\rangle$ — натурального ряда с естественной сигнатурой $\{0, 1, <, +, \times\}$ и естественным соответствием $\mathbf{Зн}_0$.

Пусть c — новое имя предмета, рассмотрим теорию

$Th_N = \mathrm{Th}(\mathbb{N}) \cup \{c \neq 0, c \neq 1, c \neq 1+1, \dots\}$.

Теория Th_N непротиворечива.

Доказательство. Действительно, любая конечная часть бесконечной теории Th_N имеет модель — обычный натуральный ряд в котором константа c интерпретируется достаточно большим натуральным числом. По теореме компактности (Мальцева) существует модель и у всей теории. □

Модели теории Th_N называются *нестандартными арифметиками*.

Пусть $\mathbb{N}^*$ — некоторая счетная нестандартная арифметика, Элементы $\mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ называются нестандартными числами. Через $\underline{i}$ мы будем обозначать следующее выражение: $1 + 1 + \cdots + 1$.

Несколько простых замечаний о структуре $\mathbb{N}^*$:

(1) имени c сопоставлено нестандартное число,

(2) Для для любого натурального числа n выполнено (i) $n < n+1$ (ii) если $n \neq 0$, то существует $n-1$ и $n-1 < n$ и (3) между n и $n+1$ нет чисел.

Поэтому в нестандартной арифметике, если $a < b$, то или $b = a + \underline{i}$ для некоторого i, или $a + \underline{i} < b$ для любого i.

Таким образом множество элементов нестандартной арифметики разбивается на классы: элементы a и b принадлежат одному классу, если $a + \underline{i} = b$ или $b + \underline{i} = a$ для некоторого i. Такие классы называются *галактиками*.

Галактика, содержащая 0 изоморфна, как упорядоченное множество, натуральным числам N. Любая другая галактика состоит из нестандартных чисел и изоморфна, как упорядоченное множество, целым числам Z.

На галактиках есть линейный порядок, изоморфный неотрицательным рациональным числам.

Докажем последнее утверждение.

Доказательство. Определим порядок на галактиках следующим образом: пусть A и B — две разные галактики. Скажем, что $A < B$ если $a < b$ для некоторых $a \in A, b \in B$. Как мы заметили ранее, определение порядка корректно: оно не зависит от выбора элементов a, b. Очевидно, что галактика натуральных чисел — галактика, содержащая 0 — является минимальной.

Покажем, что среди галактик нет максимальной. Пусть a — некоторое нестандартное число, A — галактика, к которой принадлежит a, рассмотрим галактику B, к которой принадлежит $a + a$. Заметим, что $\mathbb{N} \models \forall u, v, w(u + v = u + w \to v = w)$, поэтому и $\mathbb{N}^* \models \forall u, v, w(u + v = u + w \to v = w)$. Следовательно, $B \neq A$ — в противном случае $a + \underline{i} = a + a$, то есть $a = \underline{i}$. Кроме того, очевидно, что $A < B$.

Покажем, что порядок плотный — что между двумя любыми галактиками имеется промежуточная галактика. Поскольку $\mathbb{N} \vDash \forall u(\exists v(u = v + v \vee u + 1 = v + v))$, то данная формула истинна и в $\mathbb{N}^*$. Пусть A, B — две галактики, $A < B$. Если $a \in A, b \in B$, то для некоторого d выполнено $d + d = a + b$ или $d + d = a + b + 1$. Пусть D — галактика, содержащая такой элемент d. Поскольку $A \neq B$, то $D \neq A, D \neq B$. Поскольку $A < B$, то $A < D < B$. □

Если A и B — два упорядоченных множества, то через $A \times B$ мы обозначаем множество пар, порядок на котором задан так: $(a_0, b_0) < (a_1, b_1)$ если $a_0 < a_1$ или $a_0 = a_1$ и $b_0 < b_1$. Если A и B — два непересекающихся упорядоченных множества, то через $A + B$ мы обозначаем множество $A \cup B$, порядок на котором задан так: если $a \in A, b \in B$, то $a < b$ если $a, b \in A(a, b \in B)$ то порядок определяется порядком на $A(B)$. Используя эти обозначения, мы можем сказать, что любая счетная нестандартная арифметика как упорядоченное множество изоморфна $N^* = N + Q \times Z$ и любые две счетные арифметики, как упорядоченные множества, изоморфны. Но это, конечно, не означает, что они изоморфны как структуры с сигнатурой $\{0, 1, <, +, \times\}$.

Напомним, что на прошлой лекции мы рассматривали структуру Γ_2 — теорию дискретного линейный порядок с наименьшим элементом. Пусть M — произвольная счётная модель этой теории. Мы хотим, рассуждая так же, как и в случае структуры $\mathbb{N}^*$, показать, что структура M разбивается на галактики и эти галактики линейно упорядочены. Правда, для определения галактик в $\mathbb{N}^*$ мы использовали функцию $+$, которой нет в структуре M, однако эта функция использовалась лишь для добавления к элементу структуры a какого-либо натурального числа i, а такие операции определимы в структуре M. А именно, обозначим через $+1(x, y)$ формулу $x < y \wedge \forall u(x < u \to (y = u \vee y < u))$. Лего заметить, что $M \vDash +1(a, b)$ тогда и только тогда, когда b — непосредственно следующий (в смысле заданного порядка) элемент за a. Если через $+i(x, y)$ при $i > 1$ обозначить формулу $\exists u_0, \dots, u_{i-2}(+1(x, u_0) \wedge +1(u_0, u_1) \wedge \dots \wedge +1(u_{i-2}, y))$, то $M \vDash +i(a, b)$ тогда и только тогда, когда $b > a$ и между a и b ровно $i - 1$ элемент. Теперь мы можем определить галактики в M, сказав, что a и b принадлежат одной галактике, если $M \vDash +i(a, b)$ или $M \vDash +i(b, a)$ для некоторого натурального числа i. Теперь в точности так же, как и в случае структуры $\mathbb{N}^*$ мы можем показать, что галактики в структуре M линейно упорядочены и и галактика, содержащая 0 является минимальной. Мы, конечно не можем утверждать, что порядок плотный и без максимального элемента — да это и неверно, рассмотрите структуру $N + Z$.

Любая счетная модель M теории Γ_2 элементарно вкладывается в структуру $N^* = N + Q \times Z$.

Доказательство.

1. *Структура M вложима в структуру N^*.* Построим вложение ψ. Сначала сопоставим каждой галактике в M галактику в N^* с сохранением порядка на галактиках. Для этого сопоставим минимальной галактике в M галактику N, далее продолжим, сохраняя порядок, сопоставление на все галактики из M. Такое продолжение возможно, поскольку Q — плотно упорядоченное множество без минимального и максимального элементов. Далее определим отображение на каждой галактике. Минимальная галактика в M отображается на N естественным образом. Если неминимальной галактике G

из M сопоставлена галактика G' то отображение G на G' определяется так: выберем произвольные элементы $a \in G, a' \in G'$, сопоставим элементу a элемент a'. Далее, если $M \vDash +i(a,b)$ $(M \vDash +i(b,a))$ для некоторого натурального i, то сопоставим элементу b элемент $a' + i$ $(a' - i)$. Описание вложения завершено.

2. *Описанное выше вложение ψ элементарно.*

Используем критерий элементарности подструктуры: пусть $\overline{a} \in \psi(M), N^* \vDash (\exists u)\Phi(\overline{a}, u)$, мы хотим найти соответствующее $b \in \psi(M)$. Поскольку N^* изоморфна как упорядоченное множество нестандартной арифметике и

$\mathbb{N} \vDash \forall \overline{u}(\exists v(\Phi(\overline{u}, v) \to \Phi(\overline{u}, 0) \vee \exists v(\neg\Phi(\overline{u}, v) \wedge \exists w(+1(v, w) \wedge \Phi(\overline{u}, w))))$

то и $N^* \vDash \Phi(\overline{a}, 0) \vee \exists v(\neg\Phi(\overline{a}, v) \wedge \exists w(+1(v, w) \wedge \Phi(\overline{a}, w))$

если $N^* \vDash \Phi(\overline{a}, 0)$, то искомый b найден, поскольку $0 \in \psi(M)$.

пусть $N^* \vDash \neg\Phi(\overline{a}, b) \wedge \exists w(+1(b, w) \wedge \Phi(\overline{a}, w))$ для некоторого $b \in N^*$, покажем, что b (и $b + 1) \in \psi(M)$.

Пусть $b \notin \psi(M)$. Рассмотрим отображение $\varphi\colon N^* \to N^*$ такое, что $\varphi(x) = x$ при $x \in \psi(M), \varphi(x) = x + 1$ при $x \notin \psi(M)$. Это автоморфизм структуры с порядком, поэтому $N^* \vDash \Phi(\overline{a}, b) \Leftrightarrow N^* \vDash \Phi(\varphi(\overline{a}), \varphi(b)) \Leftrightarrow N^* \vDash \Phi(\overline{a}, b + 1)$, что невозможно. $\square$

Любая счетная модель теории Γ_2 элементарно эквивалентна структуре N^*, следовательно является элементарным расширением структуры натуральных чисел с порядком. Теория Γ_2 полна.

Выразимые отношения

Пусть $M = \langle D, \Sigma, \mathbf{Зн} \rangle$ — некоторая структура, а R — некоторое n-местное отношение на множестве D. Напомним, что мы называем R *выразимым* отношением, если для некоторой формулы $\Phi(\overline{x})$ в сигнатуре Σ с n свободными переменными и любых $\overline{a} \in D$ имеет место $\overline{a} \in R \Leftrightarrow M \vDash \Phi(\overline{a})$.

При доказательстве полноты теории Γ_2 мы использовали подходящие автоморфизмы, использование автоморфизмов полезно и для доказательства невыразимости отношений. Оно основано на следующем простом соображении: пусть имеется структура M, n-местное отношение R на множестве (носителе) структуры M, автоморфизм φ структуры M и такие элементы $\overline{a} \in M$, что $\overline{a} \in R$ но $\varphi(\overline{a}) \notin R$. Тогда очевидно, что R не выразимо в M.

В качестве примера рассмотрим следующий вопрос: выразимо ли отношение порядка через функцию сложения? Конечно, ответ зависит от того, в какой структуре рассматриваются эти отношение и функция. В случае натуральных чисел порядок выразим простой формулой $\exists u(u \neq 0 \wedge y = x + u)$. В случае целых чисел порядок выразить нельзя: отображение $\varphi(x) = -x$ является автоморфизмом структуры $\langle Z, \{+\}, \mathbf{Зн}_0 \rangle$ но не сохраняет порядок (не является монотонно возрастающим).

Нашим следующим примером будет структура $\mathbb{Q}$. Автоморфизмами этой структуры являются монотонно возрастающие отображения Q на Q и только они. Поскольку для любых $q_0, q_1 \in Q$ имеется автоморфизм, переводящий q_0 в q_1, то все одноместные отношения, выразимые в $\mathbb{Q}$ тривиальны: они либо тождественно истины (совпадают с

Q) или тождественно ложны (пусты). Поскольку для любых $q_0, q_1, q_2, q_3 \in Q$, таких, что $q_0 < q_1$ и $q_2 < q_3$ имеется автомрфизм, переводящий q_0 в q_2 и q_1 в q_3, то выразимые двуместные отношения тоже устроены весьма просто. В случае трехместных отношений появляются нетривиальные — например отношение ”между”: $x < y < z \vee z < y < x$ и отношение ”цикла”: $x < y < z \vee y < z < x \vee z < x < y$. Эти отношения невыразимы друг через друга и, в частности, ни в одном из них не выразим порядок. Когда мы говорим, что отношение R на множестве D не выразимо через отношения $S_0, \ldots, S_k$ на том же множестве, мы подразумеваем следующее формальное утверждение: рассмотрим структуру $M = \langle D, \{s_0, \ldots, s_k\}, \mathbf{Зн}\rangle$, сопоставление **Зн** определено так, что $\mathbf{Зн}(s_i) = S_i$. Тогда отношение R не выразимо в структуре M.

Чтобы доказать невыразимость, скажем, порядка через отношение ”между” достаточно привести взаимно однозначное отображение Q на Q, сохраняющее отношение ”между” и не являющееся монотонно возрастающим (пример такого отображения $\varphi(x) = -x$). Используйте этот метод автоморфизмов для доказательства невыразимости порядка через отношение ”цикла”. Вопрос о том, какие отношения выразимы друг через друга (какова структура выразимости отношений) достаточно интересен, но его подробное обсуждение выходит за рамки данного курса.

Иногда автоморфизмов в рассматриваемой структуре так мало, что использовать автоморфизмы этой структуры для доказательства какого-либо утверждения трудно. Ситуация может измениться при переходе к элементарным расширениям.

Пусть $N_< = \langle N, \{<, 0\}, \mathbf{Зн}_0\rangle$, где $\mathbf{Зн}_0$ — естественное сопоставление. Рассмотрим следующее утверждение:

Выразимые в $N_<$ одноместные отношения — конечные или коконечные (дополнительные к конечным) подмножества. В одну сторону утверждение очевидно: любое одноэлементное множество $\{i\}, i \in N$ выразимо с помощью формулы $+i(0, x)$, значит выразимо и любое конечное и коконечное подмножество.

Мы не можем непосредственно воспользоваться методом автоморфизмов для доказательства невыразимости всех прочих подмножеств, поскольку группа автоморфизмов структуры $N_<$ тривиальна. Рассмотрим структуру $N + Z$ — элементарное расширение структуры $N_<$. Пусть $\Phi(x)$ – формула в сигнатуре $\{<\}$ с одной свободной переменной. Рассмотрим такой автоморфизм φ структуры $N + Z$, что $\varphi(x) = x$ при $x \in N$ и $\varphi(x) = x + 1$ при $x \in Z$. Те же рассуждения, что и в доказательстве элементарного вложения моделей Γ_2 в N^*, показывают, что или $N + Z \models \Phi(z)$ для любого $z \in Z$, или $N + Z \models \neg\Phi(z)$ для любого $z \in Z$. Таким образом, ($N + Z \models \forall u(u > z \to \Phi(u)) \vee \forall u(u > z \to \neg\Phi(u))$ для любого $z \in Z$) $\Rightarrow N + Z \models \exists v(\forall u(u > v \to \Phi(u)) \vee \forall u(u > v \to \neg\Phi(u))) \Rightarrow N_< \models \exists v(\forall u(u > v \to \Phi(u)) \vee \forall u(u > v \to \neg\Phi(u)))$, что и означает конечность или коконечность отношения $\Phi(x)$.

Попробуйте сформулировать и доказать аналогичное утверждение для формул с несколькими свободными переменными.