Введение в математическую логику

Лекции 12

Мы скажем, что два множества x и y *равномощны*($Sm(x,y)$), если существует взаимно однозначная функция, отображающая x на y, то есть $(\exists f(IFunc(f) \wedge x = Dom(f) \wedge y = Ra(f)))$. Нетрудно заметить, что отношение $Sm(x,y)$ является отношением эквивалентности.

Следствие 1. *Для любых двух множеств одно равномощно подмножеству другого.*

Доказательство. Простое следствие теоремы Цермело и теоремы об отображении полных порядков. $\square$

Отношение *множество x равномощно подмножеству множества y* симметрично и транзитивно.

Теорема Кантора — Бернштейна. Если множество a равномощно подмножеству множества b и множество b равномощно подмножеству множества a, то a равномощно b

Доказательство. Рассмотрим произвольный полный порядок на a, пусть I_a — наименьший начальный отрезок, равномощный a, I_b — наименьший начальный отрезок, равномощный b. Если $I_a = I_b$, то a и b равномощны.

Пусть $I_a \neq I_b, I_a \subset I_b$. По условию I_b равномощно некоторому подмножеству отрезка I_a. По следствию теоремы об отображении полных порядков это подмножество изоморфно (и, тем более, равномощно) начальному отрезку множества I_a, что противоречит выбору I_b.

Случай $I_b \subset I_a$ полностью аналогичен. $\square$

Исходное доказательство этой теоремы несколько длиннее, но зато оно не использует аксиому выбора.

Мы закончим наш фрагмент построения теории множеств следующей известной теоремой Кантора:

Теорема Кантора. Множество x не равномощно $P(x)$.

Доказательство. Пусть f — взаимно однозначная функция, отображающая x на $P(x)$. Пусть множество $a = \{y | y \in x \wedge y \notin f(y)\}$. Должно найтись такое $z \in x$, что $a = f(z)$. Если $z \in a$, то $z \notin f(z)$. Если $z \notin f(z)$, то $z \in a$. Противоречие. $\square$

Отсюда, в частности, следует, что в любой модели теории **ZFC** множество ω не равномощно множеству $P(\omega)$. С другой стороны, очевидно, что все модели теории **ZFC** бесконечны и, по теореме Лёвенгейма — Сколема об элементарной подмодели, у теории **ZFC** должна быть счётная модель. На первый взгляд эти два утверждения противоречат друг другу.

Дело, однако, в том, что если M — счетная модель теории **ZFC**, то множество $P(\omega)$ есть, по определению, $\{a \in M | a \subset \omega\}$, что не противоречит его счетности: существованию отображения из множества ω на $P(\omega)$. Теорема Кантора утверждает лишь то, что ни одно такое отображение не является функцией, то есть не является элементом модели M.

Известно, что множество подмножеств счетного множества равномощно как множеству всех действительных чисел, так и множеству действительных чисел какого-либо отрезка, скажем, $[0, 1]$. Хотя это утверждение нетрудно доказать с помощью, например, теоремы Кантора — Бернштейна, в нашем курсе мы примем это утверждение без доказательства.

Возникает вопрос о том, существуют ли множества мощности, "промежуточной" между мощностью счетного множества и мощность подмножеств счетного множества. Иными словами, имеется ли несчетное подмножество действительных чисел на отрезке $[0, 1]$, не равномощное множеству действительных чисел. Этот вопрос, рассматривавшийся еще Кантором, был сформулирован Гильбертом в качестве одной из главных проблем математики в 1900 году. Сформулирована проблема была, естественно, в терминах содержательной теории множеств и получила название *континуум-гипотеза*.

Эта проблема была решена в терминах формальной теории множеств. В 1940 году Гёдель доказал, что если теория **ZF** непротиворечива, то непротиворечива и теория, получающаяся из **ZF** добавлением замкнутой формулы, утверждающей отсутствие множества с промежуточной мощностью. В 1963 Коэн доказал, что если теория **ZF** непротиворечива, то непротиворечива и теория, получающаяся из **ZF** добавлением замкнутой формулы, утверждающей существование множества с промежуточной мощностью. В 1965 году результат Коэна был получен другим методом Вопенкой.

Результаты о невыводимости утверждения в теории **ZF** носят неизбежно условный характер: "Если **ZF** непротиворечива, то ...". Ясно, что если теория **ZF** противоречива, то в ней выводится любое утверждение. С другой стороны, утверждение о том, что в **ZF** не выводимо противоречие, может быть записано в виде формулы **ZF**, однако, как следует из результатов Гёделя, если теория **ZF** непротиворечива, то эта формула невыводима в **ZF**.

Поскольку мы предполагаем, что обычные математические рассуждения формализуются в **ZF**, то у нас нет большой надежды на то, что непротиворечивость **ZF** доказуема.

Методы, аналогичные решению континуум-гипотезы, были использованы Гёделем для доказательства того, что если **ZF** непротиворечива, то и **ZFC** непротиворечива и Коэном для доказательства того, что если **ZF** непротиворечива, то и теория, полученная из **ZF** добавлением отрицания аксиомы выбора, непротиворечива.

Иными словами, и аксима выбора и континуум-гипотеза *независимы* в **ZF**: если теория **ZF** имеет модель, то у этой теории имеются модели, в которых соответствующее утверждение истинно и модели, в которых оно ложно.

Хотя аксима выбора независима, большинство математиков предпочитают работать с моделями, в которых аксима выбора выполнена. Использование аксимы выбора позволяет получить некоторые, на первый взляд парадоксальные, результаты.

Парадокс Банаха — Тарского. Шар можно разбить на 5 частей, передвинув которые можно сложить (без пустот и пересечений) два шара такого же радиуса.

Игра Банаха – Мазура на отрезке $[0, 1]$. На отрезке действительных чисел $[0, 1]$ выбрано некоторое подмножество A. Позицией в игре является отрезок $[a, b] \subset [0, 1]$, начальная позиция — отрезок $[0, 1]$. Играют двое, ходят по очереди, каждый игрок своим ходом в позиции $[a, b]$ указывает новую позицию: $[a', b'] \subset [a, b]$. Первый игрок выиграл в (бесконечной) игре, если найдется число в A, принадлежащее всем позициям.

Из аксиомы выбора следует существование такого множества A, что ни у первого, ни у второго игрока нет выигрывающей стратегии.

В данном курсе мы не можем даже в общих чертах проиллюстрировать методы доказательства независимости утверждений в **ZF**. Ограничимся достаточно тривиальным примером. Весьма упрощенно, многие методы доказательства состоят в том, что мы, используя произвольную модель теории **ZF** строим на ее основе новую модель, в которой выролнены нужные нам утверждения.

Пусть мы хотим построить модель, в которой ложна аксиома бесконечности. В содержательной теории множеств мы могли бы взять отображение f, определенное на натуральных числах N и заданное рекурсивными соотношениями: (1) $f(0) = \varnothing$; $(2) f(n+1) = f(n) \cup P(f(n))$. Нетрудно заметить, что $\bigcup\{f(n) | n \in N\}$ является моделью **ZF** без аксиомы бесконечности.

Рассмотрев в модели теории **ZF** функцию на ω, заданную теми же рекурсивными соотношениями, мы получим подмодель, в которой выполнены все аксиомы, кроме аксиомы бесконечности.