

# Московский государственный университет Механико-математический факультет

“Введение в математическую логику”

1-й курс, 2-й семестр

Программа

## **Введение**

Предмет математической логики. Вопросы оснований математики. Аксиоматическое построение элементарной геометрии, роль аксиомы о параллельных. Парадоксы теории множеств, семантические парадоксы. Формальный аксиоматический метод Гильберта, программа Гильберта. Роль теорем Гёделя о неполноте.

## **Логика высказываний**

Высказывания и логические связки. Формулы логики высказываний, понятие подформулы. Истинностные таблицы для логических связок и формул.

Выполнимые формулы, тавтологии, тождественно ложные формулы. Алгоритм распознавания выполнимости. Равносильность формул логики высказываний, связь с тождественной истинностью; важнейшие равносильности. Операции подстановки и замены подформулы на равносильную. Допустимые правила вывода.

Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы. Приведение формул логики высказываний к совершенной дизъюнктивной (конъюнктивной) нормальной форме.

## **Исчисление высказываний**

Аксиомы и правила вывода исчисления высказываний. Понятие вывода и выводимой формулы; примеры. Корректность исчисления высказываний.

Выводимость из гипотез. Теорема о дедукции для исчисления высказываний.

Непротиворечивые и максимальные непротиворечивые множества формул. Теорема Линденбаума о расширении непротиворечивого множества формул до максимального. Теорема о полноте исчисления высказываний.

## **Логика предикатов**

Предикаты. Переменные и их области изменения. Кванторы. Языки первого порядка: термы, формулы, подформулы. Примеры языков первого по-

рядка. Свободные и связанные вхождения переменных. Замкнутые формулы. Подстановка терма вместо переменной.

Интерпретации (алгебраические системы, модели) для данного языка первого порядка. Истинность замкнутой формулы в данной интерпретации. Предикаты, выразимые в данной интерпретации.

Общезначимые и выполнимые формулы языка первого порядка, их взаимосвязь; примеры. Равносильность формул языка первого порядка, важнейшие равносильности. Переименование связанных переменных. Операции подстановки и замены подформулы на равносильную. Приведение формулы к предварённой нормальной форме.

Понятие изоморфизма интерпретаций. Сохранение значения формулы при изоморфизме. Доказательство невыразимости с помощью изоморфизма интерпретаций, примеры.

Модель для данного множества замкнутых формул. Семантическое следование в логике первого порядка.

Теория первого порядка, её аксиомы и теоремы. Примеры теорий: теория частичных порядков, теория групп, теория полей, формальная арифметика, элементарная геометрия плоскости (аксиомы Тарского).

Понятие совместной теории. Элементарная теория данной интерпретации. Элементарная эквивалентность интерпретаций. Понятие полной теории.

## **Исчисление предикатов**

Аксиомы и правила вывода исчисления предикатов. Выводимость из множества замкнутых гипотез. Теорема о дедукции для исчисления предикатов. Общезначимость аксиом исчисления предикатов. Теорема о корректности исчисления предикатов.

Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов (без доказательства). Теорема Мальцева о компактности для логики предикатов.

Нестандартные модели арифметики, их существование. Описание отношения порядка для счётных нестандартных моделей арифметики.

Теорема Лёвенгейма–Сколема. Теорема Мальцева о повышении мощности.

## **Теория алгоритмов**

Основные понятия теории алгоритмов. Функция, вычисляемая данным алгоритмом; область определения вычислимой функции. Вычисление словарных и числовых функций на машинах Тьюринга. Тезис Чёрча–Тьюринга.

Разрешимые множества. Нумерация пар натуральных чисел. Нумерация словарного пространства. Эквивалентные определения перечислимого множе-

ства. Свойства объединения, пересечения и дополнения разрешимых и перечислимых множеств. Теорема Поста. Перечислимость области определения и области значений вычислимой функции. Теорема о графике вычислимой функции.

Кодирование машин Тьюринга. Существование универсальной машины Тьюринга. Универсальные функции. Пример вычислимой функции, не имеющей всюду определённого вычислимого продолжения. Существование неразрешимого перечислимого множества. Алгоритмическая неразрешимость проблемы самоприменимости и проблемы остановки машин Тьюринга. Существование неотделимой пары перечислимых множеств. Теорема Райса.

## Разрешимые и неразрешимые теории

Понятие разрешимой теории. Эффективно аксиоматизируемые теории. Теорема о разрешимости полной эффективно аксиоматизируемой теории.

Формальная арифметика Пеано, её стандартная модель.  $\Sigma_1$ -определимость в стандартной модели арифметики. Эквивалентность понятий перечислимого и  $\Sigma_1$ -определимого множества. Неперечислимость множества арифметических истин. Проблема распознавания истинности замкнутых арифметических формул, её алгоритмическая неразрешимость. Теоремы Гёделя о неполноте формальной арифметики (вторая теорема Гёделя о неполноте без доказательства).

## Рекомендуемая литература

- [1] *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. — М.: Наука, 1984. — 320 с.
- [2] *Успенский В. А., Верещагин Н. К., Плиско В. Е.* Вводный курс математической логики. М.: Физматлит, 2002. — 128 с.
- [3] *Колмогоров А. Н., Драгалин А. Г.* Математическая логика. — М.: УРСС, 2004. — 240 с.
- [4] *Лавров И. А., Максимова Л. Л.* Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. — М.: Физматлит, 2004. — 256 с.
- [5] *Клини С. К.* Математическая логика. — М.: Мир, 1973. — 480 с.
- [6] *Верещагин Н. К., Шень А.* Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2. Языки и исчисления. — М.: МЦНМ, 2000. — 288 с.
- [7] *Верещагин Н. К., Шень А.* Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 3. Вычислимые функции. — М.: МЦНМ, 1999. — 176 с.