Логика предикатов
лекция 7

Лев Дмитриевич Беклемишев
http://lpcs.math.msu.su/vml2010

lbekl@yandex.ru

25.03.2010

Подстановка в логике предикатов

Стандартные факты:

- Допустимость правил подстановки и замены подформулы на эквивалентную
- Теорема о предварённой нормальной форме

Особенности:

- Более сложное понятие подстановки

Расширение языка пропозициональными переменными

- Обогатим язык логики первого порядка пропозициональными переменными. Можно считать переменную P нульместным предикатным символом.
- Распостраним на расширенный язык все синтаксические понятия, включая понятие формулы.
- Пропозициональные переменные считаются атомарными формулами.

Подстановка

Опр.
$C[P/A]$ означает результат замены всех вхождений P в формулу C на формулу A.

Замечание.
$C[P/A]$ не всегда является формулой. Если $C = \forall x\,(Q(x) \wedge P)$ и $A = \exists x R(x)$, то

$$C[P/A] = \forall x\,(Q(x) \wedge \exists x R(x))\ .$$

Подстановка

Опр.
$C[P/A]$ означает результат замены всех вхождений P в формулу C на формулу A.

Замечание.
$C[P/A]$ не всегда является формулой. Если $C = \forall x\,(Q(x) \wedge P)$ и $A = \exists x R(x)$, то

$$C[P/A] = \forall x\,(Q(x) \wedge \exists x R(x))\ .$$

Лемма.
$C[P/A]$ — формула, если и только если любое вхождение P в формулу C не находится в области действия квантора по переменной $x \in \mathrm{BdVar}$, входящей в A.

Опр.
Говорим, что *разрешена подстановка формулы A вместо P в C*, если выполнено условие предыдущей леммы.

Лемма.
$C[P/A]$ — формула, если и только если любое вхождение P в формулу C не находится в области действия квантора по переменной $x \in \mathrm{BdVar}$, входящей в A.

Опр.

Говорим, что *разрешена подстановка формулы A вместо P в C*, если выполнено условие предыдущей леммы.

Лемма.

1. Если $A \equiv B$, то $\neg A \equiv \neg B$.
   Если $A_1 \equiv B_1$ и $A_2 \equiv B_2$, то
   $A_1 \wedge A_2 \equiv B_1 \wedge B_2$, $\quad A_1 \vee A_2 \equiv B_1 \vee B_2$,
   $A_1 \to A_2 \equiv B_1 \to B_2$.

2. Если $A \equiv B$ и $x \in \mathrm{BdVar}$ не входит в A, B, то
   $\forall x A[a/x] \equiv \forall x B[a/x]$ и $\exists x A[a/x] \equiv \exists x B[a/x]$.

Лемма.

1. Если $A \equiv B$, то $\neg A \equiv \neg B$.
   Если $A_1 \equiv B_1$ и $A_2 \equiv B_2$, то
   $A_1 \wedge A_2 \equiv B_1 \wedge B_2, \quad A_1 \vee A_2 \equiv B_1 \vee B_2,$
   $A_1 \to A_2 \equiv B_1 \to B_2$.

2. Если $A \equiv B$ и $x \in \mathrm{BdVar}$ не входит в A, B, то
   $\forall x A[a/x] \equiv \forall x B[a/x]$ и $\exists x A[a/x] \equiv \exists x B[a/x]$.

Замена подформулы на эквивалентную

Теорема.

Если $A \equiv B$ и разрешена подстановка формул A, B вместо P в C, то $C[P/A] \equiv C[P/B]$.

Доказательство.

Индукция по построению формулы C на основе предыдущей леммы. Рассмотрим лишь случай $C = \forall x D[a/x]$.

Замена подформулы на эквивалентную

Теорема.

Если $A \equiv B$ и разрешена подстановка формул A, B вместо P в C, то $C[P/A] \equiv C[P/B]$.

Доказательство.

Индукция по построению формулы C на основе предыдущей леммы. Рассмотрим лишь случай $C = \forall x D[a/x]$.

- Поскольку $C = \forall x D[a/a'][a'/x]$, можно считать, что a не входит в A, B.
- По предположению индукции $D[P/A] \equiv D[P/B]$.
- В силу подставимости формул A, B в C, x не входит в A, B. Отсюда

$$\forall x D[P/A][a/x] \equiv \forall x D[P/B][a/x].$$

- Поскольку $C = \forall x D[a/a'][a'/x]$, можно считать, что a не входит в A, B.
- По предположению индукции $D[P/A] \equiv D[P/B]$.
- В силу подставимости формул A, B в C, x не входит в A, B. Отсюда

$$\forall x D[P/A][a/x] \equiv \forall x D[P/B][a/x].$$

- Поскольку $C = \forall x D[a/a'][a'/x]$, можно считать, что a не входит в A, B.
- По предположению индукции $D[P/A] \equiv D[P/B]$.
- В силу подставимости формул A, B в C, x не входит в A, B. Отсюда

$$\forall x D[P/A][a/x] \equiv \forall x D[P/B][a/x].$$

- Поскольку a не входит в A, B $D[P/A][a/x] = D[a/x][P/A]$.
- Отсюда

$$
\begin{aligned}
(\forall x D[a/x])[P/A] &= (\forall x D[P/A][a/x]) \\
\equiv (\forall x D[P/B][a/x]) &= (\forall x D[a/x])[P/B].
\end{aligned}
$$

- Поскольку a не входит в A, B $D[P/A][a/x] = D[a/x][P/A]$.
- Отсюда

$$
\begin{aligned}
(\forall x D[a/x])[P/A] &= (\forall x D[P/A][a/x]) \\
\equiv (\forall x D[P/B][a/x]) &= (\forall x D[a/x])[P/B].
\end{aligned}
$$

Замена связанной переменной

Лемма.
Пусть $y \in \mathrm{BdVar}$ не входит в формулу B. Тогда $B[x/y]$ есть формула и $B[x/y] \equiv B$.

Доказательство.
Применяем индукцию по числу вхождений кванторов по переменной x в B. Каждая подформула $\forall x C[a/x]$ или $\exists x C[a/x]$ заменяется на эквивалентную $\forall y C[a/y]$ или $\exists y C[a/y]$.

Замена связанной переменной

Лемма.
Пусть $y \in \mathrm{BdVar}$ не входит в формулу B. Тогда $B[x/y]$ есть формула и $B[x/y] \equiv B$.

Доказательство.
Применяем индукцию по числу вхождений кванторов по переменной x в B. Каждая подформула $\forall x C[a/x]$ или $\exists x C[a/x]$ заменяется на эквивалентную $\forall y C[a/y]$ или $\exists y C[a/y]$.

Семантика расширенного языка

- Пропозициональная переменная P в модели M интерпретируется как логическая константа, то есть $P_M \in \mathbb{B}$.
- Считается $M \models P_M$, если $P_M = И$ и $M \not\models P_M$, если $P_M = Л$.
- Понятие общезначимой формулы распространяется на формулы расширенного языка.

Теорема о подстановке

Теорема.

Пусть формула A общезначима и разрешена подстановка формулы C вместо P в A, тогда общезначима формула $A[P/C]$.

Доказательство.

- Допустим, $M \not\models f(A[P/C])$ при некоторой оценке f.
- Расширим M до модели (M, P) сигнатуры с переменной P: $P_M = \text{И} \iff M \models f(C)$.

Теорема о подстановке

Теорема.

Пусть формула A общезначима и разрешена подстановка формулы C вместо P в A, тогда общезначима формула $A[P/C]$.

Доказательство.

- Допустим, $M \not\models f(A[P/C])$ при некоторой оценке f.
- Расширим M до модели (M, P) сигнатуры с переменной P: $P_M = И \iff M \models f(C)$.

- Индукцией по построению формулы B проверим, что

$$(M, P) \models B \iff M \models B[P/C]$$

для любой формулы B, в которую разрешена подстановка C вместо P.
- Отсюда получаем $(M, P) \not\models A$.

Предварённая нормальная форма

Опр.

Формула A называется *предварённой*, если A имеет вид $Qx_1Qx_2\dots Qx_nA_0[b_1/x_1,\dots,b_n/x_n]$, где Q означает квантор $\forall$ или $\exists$, а формула A_0 бескванторная.

Теорема.

Для каждой формулы A можно указать эквивалентную ей предварённую формулу A' от тех же свободных переменных.

Предварённая нормальная форма

Опр.

Формула A называется *предварённой*, если A имеет вид $\mathsf{Q}x_1\mathsf{Q}x_2\dots\mathsf{Q}x_nA_0[b_1/x_1,\dots,b_n/x_n]$, где Q означает квантор $\forall$ или $\exists$, а формула A_0 бескванторная.

Теорема.

Для каждой формулы A можно указать эквивалентную ей предварённую формулу A' от тех же свободных переменных.

Доказательство.

Применяя основные эквивалентности с кванторами постепенно выносим все кванторы наружу. Переименовываем связанные переменные там, где это необходимо.

$$
\begin{aligned}
(\forall x\, A[a/x] \vee B) &\equiv \forall x\, (A[a/x] \vee B) \\
(\exists x\, A[a/x] \vee B) &\equiv \exists x\, (A[a/x] \vee B) \\
(\forall x\, A[a/x] \wedge B) &\equiv \forall x\, (A[a/x] \wedge B) \\
(\exists x\, A[a/x] \wedge B) &\equiv \exists x\, (A[a/x] \wedge B) \\
\neg\forall x A[a/x] &\equiv \exists x \neg A[a/x] \\
\neg\exists x A[a/x] &\equiv \forall x \neg A[a/x]
\end{aligned}
$$

Доказательство.

Применяя основные эквивалентности с кванторами постепенно выносим все кванторы наружу. Переименовываем связанные переменные там, где это необходимо.

$$
\begin{array}{rcl}
(\forall x\, A[a/x] \vee B) & \equiv & \forall x\, (A[a/x] \vee B) \\
(\exists x\, A[a/x] \vee B) & \equiv & \exists x\, (A[a/x] \vee B) \\
(\forall x\, A[a/x] \wedge B) & \equiv & \forall x\, (A[a/x] \wedge B) \\
(\exists x\, A[a/x] \wedge B) & \equiv & \exists x\, (A[a/x] \wedge B) \\
\neg\forall x A[a/x] & \equiv & \exists x \neg A[a/x] \\
\neg\exists x A[a/x] & \equiv & \forall x \neg A[a/x]
\end{array}
$$

Пример.

$$
\begin{aligned}
&\forall x P(x) \wedge \neg \forall x Q(x, a) &&\equiv \\
&\forall x P(x) \wedge \exists x \neg Q(x, a) &&\equiv \\
&\forall x P(x) \wedge \exists y \neg Q(y, a) &&\equiv \\
&\forall x \left(P(x) \wedge \exists y \neg Q(y, a)\right) &&\equiv \\
&\forall x \exists y \left(P(x) \wedge \neg Q(y, a)\right).
\end{aligned}
$$

Замечание.
Кванторы могут быть вынесены наружу в различном порядке, поэтому предварённая форма данной формулы не единственна.

Пример.

$$
\begin{aligned}
&\forall x P(x) \land \neg \forall x Q(x, a) && \equiv \\
&\forall x P(x) \land \exists x \neg Q(x, a) && \equiv \\
&\forall x P(x) \land \exists y \neg Q(y, a) && \equiv \\
&\forall x \left(P(x) \land \exists y \neg Q(y, a) \right) && \equiv \\
&\forall x \exists y \left(P(x) \land \neg Q(y, a) \right).
\end{aligned}
$$

Замечание.
Кванторы могут быть вынесены наружу в различном порядке, поэтому предварённая форма данной формулы не единственна.

Пример.

$$\begin{aligned}
&\forall x P(x) \wedge \neg\forall x Q(x, a) &&\equiv\\
&\forall x P(x) \wedge \exists x \neg Q(x, a) &&\equiv\\
&\forall x P(x) \wedge \exists y \neg Q(y, a) &&\equiv\\
&\forall x\, (P(x) \wedge \exists y \neg Q(y, a)) &&\equiv\\
&\forall x \exists y\, (P(x) \wedge \neg Q(y, a)).
\end{aligned}$$

Замечание.
Кванторы могут быть вынесены наружу в различном порядке, поэтому предварённая форма данной формулы не единственна.

Пример.

$$
\begin{aligned}
\forall x P(x) \land \neg \forall x Q(x, a) &\equiv \\
\forall x P(x) \land \exists x \neg Q(x, a) &\equiv \\
\forall x P(x) \land \exists y \neg Q(y, a) &\equiv \\
\forall x \left(P(x) \land \exists y \neg Q(y, a)\right) &\equiv \\
\forall x \exists y \left(P(x) \land \neg Q(y, a)\right).
\end{aligned}
$$

Замечание.
Кванторы могут быть вынесены наружу в различном порядке, поэтому предварённая форма данной формулы не единственна.

Пример.

$$\begin{aligned}
&\forall x P(x) \wedge \neg\forall x Q(x,a) &&\equiv\\
&\forall x P(x) \wedge \exists x \neg Q(x,a) &&\equiv\\
&\forall x P(x) \wedge \exists y \neg Q(y,a) &&\equiv\\
&\forall x\,(P(x) \wedge \exists y \neg Q(y,a)) &&\equiv\\
&\forall x \exists y\,(P(x) \wedge \neg Q(y,a)).
\end{aligned}$$

Замечание.

Кванторы могут быть вынесены наружу в различном порядке, поэтому предварённая форма данной формулы не единственна.

Пример.

$$
\begin{aligned}
\forall x P(x) \wedge \neg\forall x Q(x, a) &\equiv \\
\forall x P(x) \wedge \exists x \neg Q(x, a) &\equiv \\
\forall x P(x) \wedge \exists y \neg Q(y, a) &\equiv \\
\forall x \left(P(x) \wedge \exists y \neg Q(y, a)\right) &\equiv \\
\forall x \exists y \left(P(x) \wedge \neg Q(y, a)\right).
\end{aligned}
$$

Замечание.
Кванторы могут быть вынесены наружу в различном порядке, поэтому предварённая форма данной формулы не единственна.

Теории

Опр.

Теорией сигнатуры Σ называем произвольное множество T замкнутых формул языка $\mathcal{L}_\Sigma$. Элементы $A \in T$ называем *нелогическими аксиомами* T.

Пример.

Теория отношения эквивалентности:

- $\forall x\, R(x, x)$;
- $\forall x, y\, (R(x, y) \to R(y, x))$;
- $\forall x, y, z\, (R(x, y) \wedge R(y, z) \to R(x, z))$.

Теории

Опр.

Теорией сигнатуры Σ называем произвольное множество T замкнутых формул языка $\mathcal{L}_\Sigma$. Элементы $A \in T$ называем *нелогическими аксиомами* T.

Пример.

Теория отношения эквивалентности:

- $\forall x\, R(x, x)$;
- $\forall x, y\, (R(x, y) \to R(y, x))$;
- $\forall x, y, z\, (R(x, y) \land R(y, z) \to R(x, z))$.

Модель теории

Опр.

Модель $(M; \Sigma)$ есть *модель теории* T (обозначение $M \models T$), если для любой $A \in T$ $M \models A$.

Пример.

R есть отношение эквивалентности на множестве M, если и только если $(M; R) \models T$, где T — теория отношения эквивалентности.

Модель теории

Опр.

Модель $(M; \Sigma)$ есть *модель теории* T (обозначение $M \vDash T$), если для любой $A \in T$ $M \vDash A$.

Пример.

R есть отношение эквивалентности на множестве M, если и только если $(M; R) \vDash T$, где T — теория отношения эквивалентности.

Пример.

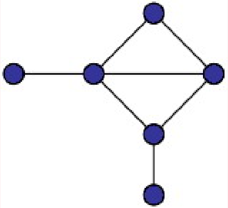
Модель $(M; <)$ есть *строгий частичный порядок*, если в $(M; <)$ истинны следующие предложения:

1. $\forall x, y, z\, (x < y \wedge y < z \rightarrow x < z)$
2. $\forall x \neg\, x < x$

Пример.

Простой граф — это модель вида $(V; E)$, где E — бинарный предикат смежности, причём отношение E симметрично и иррефлексивно:

- $\forall x \neg E(x, x)$
- $\forall x, y\ (E(x, y) \to E(y, x))$



Пример.

$(M; =, \cdot, 1)$ есть *группа*, если M есть модель следующей теории (при условии, что «$=$» в M понимается как равенство):

1. $\forall x, y, z \;\; x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
2. $\forall x \, (1 \cdot x = x \wedge x \cdot 1 = x)$
3. $\forall x \exists y \, (x \cdot y = 1 \wedge y \cdot x = 1)$

Равенство

Пусть Σ — сигнатура, содержащая выделенный предикатный символ $=$.

Опр.

Нормальной моделью называем модель $(M; \Sigma)$, в которой $=$ интерпретируется как равенство $\{\langle x, x\rangle \mid x \in M\}$.

Опр.

Аксиомы равенства для Σ — универсальные замыкания следующих формул:

1. аксиомы отношения эквивалентности для $=$
2. $a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \wedge \dots \wedge a_n = b_n \to (P(a_1, \dots, a_n) \leftrightarrow P(b_1, \dots, b_n))$
3. $a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \wedge \dots \wedge a_n = b_n \to (f(a_1, \dots, a_n) = f(b_1, \dots, b_n))$

для всех $f \in \mathrm{Func}_\Sigma$ and $P \in \mathrm{Pred}_\Sigma$.

Предложение.
Если $(M;\Sigma)$ — нормальная модель, то в M истинны все аксиомы равенства.

Опр.
Теорией с равенством называем теорию сигнатуры Σ с равенством, содержащую все аксиомы равенства.

Предложение.

Если $(M; \Sigma)$ *— нормальная модель, то в* M *истинны все аксиомы равенства.*

Опр.

Теорией с равенством называем теорию сигнатуры Σ с равенством, содержащую все аксиомы равенства.

Теорема.

Пусть T — теория с равенством. Если T выполнима, то T имеет нормальную модель.

Доказательство.

Пусть $M \models T$. Предикат $=_M$ есть отношение эквивалентности на M. Положим $M' \rightleftharpoons M/{=_M}$ — множество классов эквивалентности и $\varphi : M \to M'$ сопоставляет любому $x \in M$ его класс $\varphi(x) \in M'$.

Теорема.

Пусть T — теория с равенством. Если T выполнима, то T имеет нормальную модель.

Доказательство.

Пусть $M \models T$. Предикат $=_M$ есть отношение эквивалентности на M. Положим $M' \rightleftharpoons M/{=_M}$ — множество классов эквивалентности и $\varphi : M \to M'$ сопоставляет любому $x \in M$ его класс $\varphi(x) \in M'$.

В силу аксиом равенства в M, все функции и предикаты корректно определены на M' и M' — нормальная модель.

Индукцией по построению формулы A проверяем

$$M \models A[x_1, \ldots, x_n] \iff M' \models A[\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)].$$

Отсюда следует $M' \models T$.

Упражнения

Упражнение

Выпишете аксиомы теории коммутативных колец с единицей в сигнатуре $=, +, -, \cdot, 0, 1$.

Упражнение

Выпишете аксиомы теории полей в той же сигнатуре.

Элементарная геометрия

Аксиоматика Тарского:

$G1.$ $ab \cong ba$

$G2.$ $ab \cong pq \wedge ab \cong rs \to pq \cong rs$

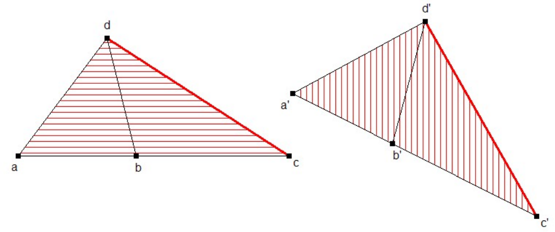
$G3.$ $ab \cong cc \to a = b$

$G4.$ $Babd \wedge Bbcd \to Babc$

$G5.$ $\exists x(Bqax \wedge ax \cong bc)$

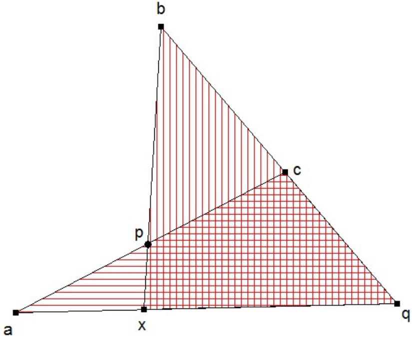
$G6.$ (пять отрезков)

$$(a \neq b \wedge Babc \wedge Ba'b'c' \wedge ab \cong a'b' \wedge bc \cong b'c' \\ \wedge\, ad \cong a'd' \wedge bd \cong b'd') \to cd \cong c'd'$$



$G7.$ (аксиома Паша)

$$Bapc \wedge Bqcb \rightarrow \exists x \, (Baxq \wedge Bbpx)$$

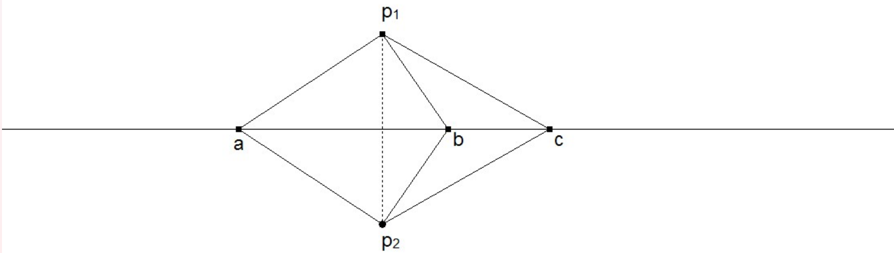


Аксиомы размерности

$G8.\ \exists x, y, z\,(\neg Bxyz \wedge \neg Byzx \wedge \neg Bzxy)$

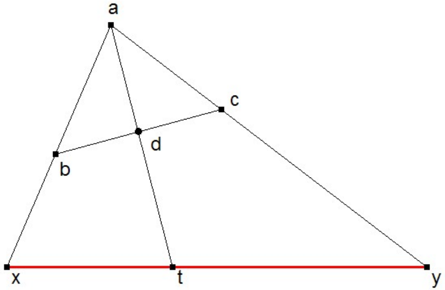
$G9.\ (dim \leq 2)$

$$(p_1 \neq p_2 \wedge ap_1 \cong ap_2 \wedge bp_1 \cong bp_2 \wedge cp_1 \cong cp_2) \\ \rightarrow a \in bc$$



G10. (аксиома Евклида)

$$Badt \wedge Bbdc \wedge a \neq d \rightarrow$$
$$\exists x, y\ (Babx \wedge Bacy \wedge Bytx)$$



$G11.$ (схема аксиом непрерывности)

$$\exists u \forall x, y\, (C[a/x] \land D[a/y] \to Buxy) \to \exists v \forall x, y\, (C[a/x] \land D[a/y] \to Bxvy)$$

Здесь x, y, u, v не входят в C, D.

$G11'.$ (аксиома непрерывности 2-го порядка)

$$\forall X, Y\, (\exists u \forall x, y\, (x \in X \land y \in Y \to Buxy) \to \exists v \forall x, y\, (x \in X \land y \in Y \to Bxvy))$$

Теорема Тарского о полноте

Теорема.

Для любого предложения A *языка элементарной геометрии, если* $(\mathbb{R}^2; =, B, \cong) \models A$, *то* A *логически следует из аксиом* $G1 - G11$.

Теорема.

Существует алгоритм проверки формулы A *на выполнимость в* $\mathbb{R}^2$.

Исчисление предикатов

Исчисление предикатов сигнатуры Σ задаётся след. аксиомами и правилами вывода.

Аксиомы:

$A1.$ аксиомы исчисления высказываний,

$A2.$ $\forall x A[a/x] \to A[a/t]$,

$A3.$ $A[a/t] \to \exists x A[a/x]$.

Здесь A — любая формула сигнатуры Σ и t — любой терм (x не входит в A).

Правила вывода:

$$R1.\ \frac{A \quad A \to B}{B}\ (\textit{modus ponens})$$

$$R2.\ \frac{A \to B}{A \to \forall x B[a/x]}$$

$$R3.\ \frac{B \to A}{\exists x B[a/x] \to A}$$

Здесь a не входит в A (и x не входит в B).

Правила R2 и R3 называются *правилами Бернайса*.

Выводимость

Опр.

Выводом в исчислении предикатов называется конечная последовательность формул, каждая из которых либо является аксиомой, либо получается из предыдущих формул по одному из правил вывода $R1 - R3$.

Пример.

$$\forall x A[a/x] \to A \qquad (A2)$$
$$\forall x A[a/x] \to \forall y A[a/y] \qquad (R2)$$

Выводимость

Опр.

Выводом в исчислении предикатов называется конечная последовательность формул, каждая из которых либо является аксиомой, либо получается из предыдущих формул по одному из правил вывода $R1 - R3$.

Пример.

$$\begin{array}{ll} \forall x A[a/x] \to A & (A2) \\ \forall x A[a/x] \to \forall y A[a/y] & (R2) \end{array}$$

Опр.

Формула A называется *выводимой* в исчислении предикатов или *теоремой* исчисления предикатов (обозначение $\vdash A$), если существует вывод, в котором последняя формула есть A.

Пример.

$\vdash \forall x A[a/x] \to \forall y A[a/y]$ для любой формулы A.

Выводы в теории

Опр.

Выводом в теории T называется конечная последовательность формул, каждая из которых либо принадлежит множеству T, либо является логической аксиомой вида $A1 - A3$, либо получается из предыдущих формул по одному из правил вывода $R1 - R3$.

Доказуемость, опровержимость

Опр.

Формула A называется *выводимой (доказуемой) в теории* T или *теоремой* T (обозначение $T \vdash A$), если существует вывод в T, в котором последняя формула есть A.

Опр.

Формула A *опровержима* в T, если $T \vdash \neg A$.

Опр.

Формула A *независима* от T, если $T \nvdash A$ и $T \nvdash \neg A$.

Доказуемость, опровержимость

Опр.

Формула A называется *выводимой (доказуемой) в теории* T или *теоремой* T (обозначение $T \vdash A$), если существует вывод в T, в котором последняя формула есть A.

Опр.

Формула A *опровержима* в T, если $T \vdash \neg A$.

Опр.

Формула A *независима* от T, если $T \nvdash A$ и $T \nvdash \neg A$.

Доказуемость, опровержимость

Опр.

Формула A называется *выводимой (доказуемой) в теории* T или *теоремой* T (обозначение $T \vdash A$), если существует вывод в T, в котором последняя формула есть A.

Опр.

Формула A *опровержима* в T, если $T \vdash \neg A$.

Опр.

Формула A *независима* от T, если $T \nvdash A$ и $T \nvdash \neg A$.

Свойства выводимости

- Если $T \subseteq U$ и $T \vdash A$, то $U \vdash A$ (*монотонность*).
- Если $T \vdash A$, то существует такое конечное множество $T_0 \subseteq T$, что $T_0 \vdash A$ (*компактность*).
- Если $T \vdash A$ и для каждой аксиомы $B \in T$ имеет место $U \vdash B$, то $U \vdash A$ (*транзитивность*).

Свойства выводимости

- Если $T \subseteq U$ и $T \vdash A$, то $U \vdash A$ (*монотонность*).
- Если $T \vdash A$, то существует такое конечное множество $T_0 \subseteq T$, что $T_0 \vdash A$ (*компактность*).
- Если $T \vdash A$ и для каждой аксиомы $B \in T$ имеет место $U \vdash B$, то $U \vdash A$ (*транзитивность*).

Свойства выводимости

- Если $T \subseteq U$ и $T \vdash A$, то $U \vdash A$ (*монотонность*).
- Если $T \vdash A$, то существует такое конечное множество $T_0 \subseteq T$, что $T_0 \vdash A$ (*компактность*).
- Если $T \vdash A$ и для каждой аксиомы $B \in T$ имеет место $U \vdash B$, то $U \vdash A$ (*транзитивность*).

Эквивалентность теорий

Пусть T, U — теории сигнатуры Σ.

Опр.

U содержит T, если для любой $A \in T$ $U \vdash A$ (обозначение $U \vdash T$).

Опр.

T и U (дедуктивно) эквивалентны, если $T \vdash U$ и $U \vdash T$ (обозначение $T \equiv U$).

Эквивалентность теорий

Пусть T, U — теории сигнатуры Σ.

Опр.

U содержит T, если для любой $A \in T$ $U \vdash A$ (обозначение $U \vdash T$).

Опр.

T и U (дедуктивно) эквивалентны, если $T \vdash U$ и $U \vdash T$ (обозначение $T \equiv U$).

Теорема о тавтологии

Предложение.

Если $A(P_1, \dots, P_n)$ выводима в исчислении высказываний, то для любых формул $C_1, \dots, C_n$ сигнатуры Σ формула $A[P_1/C_1, \dots, P_n/C_n]$ выводима в исчислении предикатов.

Доказательство.

Индукция по построению вывода формулы A.

Теорема о дедукции

Теорема.

Для любой теории T и замкнутой формулы A

$$T, A \vdash B \iff T \vdash A \to B.$$

Доказательство.

Индукция по длине вывода $T, A \vdash B$. Разбираем лишь новые случаи, относящиеся к правилам $R2$ и $R3$.

Теорема о дедукции

Теорема.

Для любой теории T и замкнутой формулы A

$$T, A \vdash B \iff T \vdash A \to B.$$

Доказательство.

Индукция по длине вывода $T, A \vdash B$. Разбираем лишь новые случаи, относящиеся к правилам $R2$ и $R3$.

Допустим $B = (C \to \forall x D[a/x])$ получена из $C \to D$ по $R2$. По пр. индукции

$$T \vdash A \to (C \to D).$$

Надо построить вывод

$$T \vdash A \to (C \to \forall x D[a/x]).$$

Рассмотрим тавтологию

$$(P \to (Q \to R)) \leftrightarrow (P \wedge Q \to R).$$

Подставляя A вместо P, C вместо Q и D вместо R получаем, что формула

$$(A \to (C \to D)) \leftrightarrow (A \wedge C \to D)$$

выводима в исчислении предикатов.

Таким образом, вывод $A \to (C \to D)$ в T можно продолжить:

$A \to (C \to D)$	
$(A \to (C \to D)) \to (A \wedge C \to D)$	(тавтология)
$(A \wedge C) \to D$	(MP)
$(A \wedge C) \to \forall x D[a/x]$	(R2, A замкнута)
$A \to (C \to \forall x D[a/x])$	(аналогично)

Правило $R3$ рассматривается аналогично.