Логика предикатов
лекция 6

Лев Дмитриевич Беклемишев
http://lpcs.math.msu.su/vml2010

lbekl@yandex.ru

18.03.2010

Определимость в модели

Опр.

Предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$ называется *определимым в модели* $(M; \Sigma)$, если $P = A_M$ для некоторой формулы A сигнатуры Σ, то есть

$$P(x_1, \ldots, x_n) \stackrel{\text{def}}{\iff} M \vDash A[x_1, \ldots, x_n].$$

Функция f называется *определимой в модели* M, если определим её график, то есть предикат

$$G_f(x_1, \ldots, x_n, y) \stackrel{\text{def}}{\iff} f(x_1, \ldots, x_n) = y.$$

Определимость в модели

Опр.

Предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$ называется *определимым в модели* $(M; \Sigma)$, если $P = A_M$ для некоторой формулы A сигнатуры Σ, то есть

$$P(x_1, \ldots, x_n) \overset{\text{def}}{\iff} M \vDash A[x_1, \ldots, x_n].$$

Функция f называется *определимой в модели* M, если определим её график, то есть предикат

$$G_f(x_1, \ldots, x_n, y) \overset{\text{def}}{\iff} f(x_1, \ldots, x_n) = y.$$

Пример.

В модели $(\mathbb{N}; =, +)$ формула $\exists x\, (x + x = a)$ определяет предикат «a чётно», т.е. множество чётных чисел.

Пример.

В модели $(\mathbb{R}^2; =, B)$ определим предикат $ab \parallel cd$ «прямая ab параллельна cd».

Пример.

В модели $(\mathbb{N}; =, +)$ формула $\exists x\,(x + x = a)$ определяет предикат «a чётно», т.е. множество чётных чисел.

Пример.

В модели $(\mathbb{R}^2; =, B)$ определим предикат $ab \parallel cd$ «прямая ab параллельна cd».

Общие вопросы

Для данной модели:

- Существуют ли невыразимые предикаты?
- Как можно доказать невыразимость данного предиката?

Простейший подход: *метод автоморфизма*.

Изоморфизм моделей

Пусть M и M' — модели сигнатуры Σ.

Опр.

Гомоморфизм $\varphi : M \to M'$ есть отображение из M в M', сохраняющее все предикаты, функции и константы Σ, то есть

... для всех $P \in \mathrm{Pred}_\Sigma$, $f \in \mathrm{Func}_\Sigma$ и $c \in \mathrm{Const}_\Sigma$

$$\begin{aligned} P_M(x_1, \dots, x_n) &\Rightarrow P_{M'}(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)) \\ \varphi(f_M(x_1, \dots, x_n)) &= f_{M'}(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)) \\ \varphi(c_M) &= c_{M'} \end{aligned}$$

Предложение.

Композиция гомоморфизмов — гомоморфизм.

... для всех $P \in \mathrm{Pred}_\Sigma$, $f \in \mathrm{Func}_\Sigma$ и $c \in \mathrm{Const}_\Sigma$

$$
\begin{array}{rcl}
P_M(x_1, \ldots, x_n) & \Rightarrow & P_{M'}(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)) \\
\varphi(f_M(x_1, \ldots, x_n)) & = & f_{M'}(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)) \\
\varphi(c_M) & = & c_{M'}
\end{array}
$$

Предложение.

Композиция гомоморфизмов — гомоморфизм.

Опр.

Изоморфизм $\varphi : M \to M'$ есть гомоморфизм, у которого есть обратный, то есть гомоморфизм $\psi : M' \to M$ такой, что

$$\varphi \circ \psi = id_{M'}, \qquad \psi \circ \varphi = id_M,$$

где $id_M : M \to M$ — тождественный гомоморфизм $id_M(x) = x$.

Опр.

M и M' изоморфны, если существует изоморфизм $\varphi : M \to M'$.

Опр.

Изоморфизм $\varphi : M \to M'$ есть гомоморфизм, у которого есть обратный, то есть гомоморфизм $\psi : M' \to M$ такой, что

$$\varphi \circ \psi = id_{M'}, \qquad \psi \circ \varphi = id_M,$$

где $id_M : M \to M$ — тождественный гомоморфизм $id_M(x) = x$.

Опр.

M и M' изоморфны, если существует изоморфизм $\varphi : M \to M'$.

Теорема.

Если $\varphi : M \to M'$ *— изоморфизм, то для любой формулы* $A(a_1, \ldots, a_n)$ *и любых* $c_1, \ldots, c_n \in M$

$$M \models A[c_1, \ldots, c_n] \iff M' \models A[\varphi(c_1), \ldots, \varphi(c_n)].$$

Доказательство.

Индукция по построению A.

Следствие.

В изоморфных моделях истинны одни и те же предложения.

Теорема.

Если $\varphi : M \to M'$ — изоморфизм, то для любой формулы $A(a_1, \dots, a_n)$ и любых $c_1, \dots, c_n \in M$

$$M \vDash A[c_1, \dots, c_n] \iff M' \vDash A[\varphi(c_1), \dots, \varphi(c_n)].$$

Доказательство.

Индукция по построению A.

Следствие.

В изоморфных моделях истинны одни и те же предложения.

Теорема.

Если $\varphi : M \to M'$ *— изоморфизм, то для любой формулы* $A(a_1, \dots, a_n)$ *и любых* $c_1, \dots, c_n \in M$

$$M \vDash A[c_1, \dots, c_n] \iff M' \vDash A[\varphi(c_1), \dots, \varphi(c_n)].$$

Доказательство.

Индукция по построению A.

Следствие.

В изоморфных моделях истинны одни и те же предложения.

Доказательство невыразимости методом автоморфизма

Автоморфизмом $\varphi : M \to M$ называется изоморфизм модели на себя.

Пример.

В модели $(\mathbb{Z}; =, +)$ не выразим предикат $\leq$.

Доказательство.

Отображение $\varphi : x \mapsto -x$ есть автоморфизм $(\mathbb{Z}; =, +)$, но не сохраняет $\leq$, т.к. $\mathbb{Z} \models 0 \leq 1$, но $\mathbb{Z} \not\models \varphi(0) \leq \varphi(1)$.

Доказательство невыразимости методом автоморфизма

Автоморфизмом $\varphi : M \to M$ называется изоморфизм модели на себя.

Пример.

В модели $(\mathbb{Z}; =, +)$ не выразим предикат $\leq$.

Доказательство.

Отображение $\varphi : x \mapsto -x$ есть автоморфизм $(\mathbb{Z}; =, +)$, но не сохраняет $\leq$, т.к. $\mathbb{Z} \models 0 \leq 1$, но $\mathbb{Z} \not\models \varphi(0) \leq \varphi(1)$.

Доказательство невыразимости методом автоморфизма

Автоморфизмом $\varphi : M \to M$ называется изоморфизм модели на себя.

Пример.

В модели $(\mathbb{Z}; =, +)$ не выразим предикат $\leq$.

Доказательство.

Отображение $\varphi : x \mapsto -x$ есть автоморфизм $(\mathbb{Z}; =, +)$, но не сохраняет $\leq$, т.к. $\mathbb{Z} \vDash 0 \leq 1$, но $\mathbb{Z} \nvDash \varphi(0) \leq \varphi(1)$.

Пример.

В модели $(\mathbb{Z}; \leq)$ не выразима функция $+$.

Доказательство.

$\varphi : x \mapsto x + 1$ есть автоморфизм $(\mathbb{Z}; \leq)$, не сохраняющий $+$.

Упражнение

Опишите все автоморфизмы модели $(\mathbb{Z}; \leq)$.

Ответ: все сдвиги $x \mapsto x + k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Пример.

В модели $(\mathbb{Z}; \leq)$ не выразима функция $+$.

Доказательство.

$\varphi : x \mapsto x + 1$ есть автоморфизм $(\mathbb{Z}; \leq)$, не сохраняющий $+$.

Упражнение

Опишите все автоморфизмы модели $(\mathbb{Z}; \leq)$.

Ответ: все сдвиги $x \mapsto x + k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Пример.

В модели $(\mathbb{Z}; \leq)$ не выразима функция $+$.

Доказательство.

$\varphi : x \mapsto x + 1$ есть автоморфизм $(\mathbb{Z}; \leq)$, не сохраняющий $+$.

Упражнение

Опишите все автоморфизмы модели $(\mathbb{Z}; \leq)$.

Ответ: все сдвиги $x \mapsto x + k$, *где* $k \in \mathbb{Z}$.

Пример.

Автоморфизмами модели $(\mathbb{R}^2; =, B)$ являются все взаимно однозначные аффинные преобразования плоскости и только они.

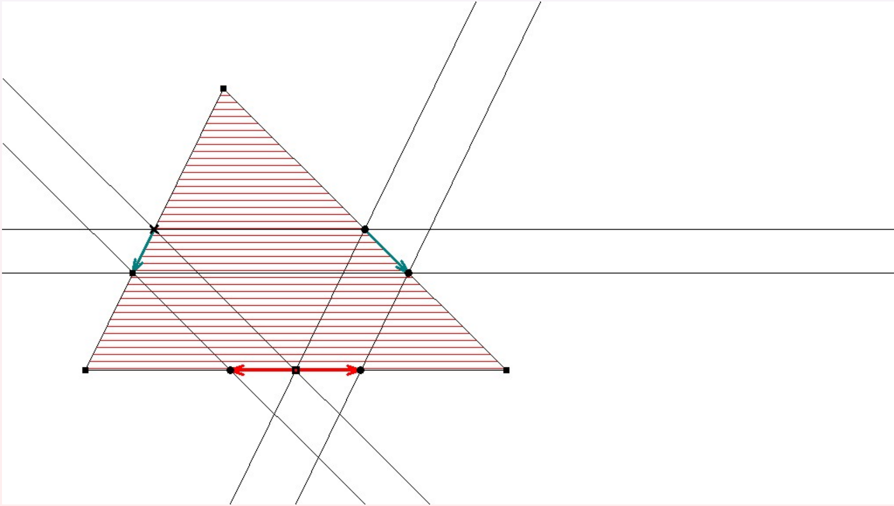
- Всякий автоморфизм переводит отрезки в отрезки.
- Всякий автоморфизм сохраняет параллельность прямых.
- Для любого автоморфизма φ существует аффинное преобразование h такое, что $\varphi \circ h$ сохраняет три различные точки.

Пример.

Автоморфизмами модели $(\mathbb{R}^2; =, B)$ являются все взаимно однозначные аффинные преобразования плоскости и только они.

- Всякий автоморфизм переводит отрезки в отрезки.
- Всякий автоморфизм сохраняет параллельность прямых.
- Для любого автоморфизма φ существует аффинное преобразование h такое, что $\varphi \circ h$ сохраняет три различные точки.

- Если автоморфизм φ имеет три различные неподвижные точки, то $\varphi = id$.



Следствие.

В модели $(\mathbb{R}^2; =, B)$ не определимы:

- никакая конкретная точка;
- никакая конкретная фигура, за искл. всей плоскости;
- предикат $\cong$;
- равенство углов.

Пример.

Автоморфизмы модели $(\mathbb{R}^2; =, B, \cong)$ есть все преобразования плоскости, являющиеся композицией гомотетии и движения.

- Предикаты B и $\cong$ сохраняются при движениях и гомотетиях.
- Аффинное преобразование, сохраняющее длины сторон некоторого треугольника, есть движение.

Пример.

Автоморфизмы модели $(\mathbb{R}^2; =, B, \cong)$ есть все преобразования плоскости, являющиеся композицией гомотетии и движения.

- Предикаты B и $\cong$ сохраняются при движениях и гомотетиях.
- Аффинное преобразование, сохраняющее длины сторон некоторого треугольника, есть движение.

- Любой автоморфизм φ переводит равносторонний треугольник в (подобный ему) равносторонний.
- Для некоторой гомотетии h автоморфизм $\varphi \circ h$ сохраняет длины сторон заданного равностороннего треугольника.
- Значит, $\varphi \circ h$ — движение.

Следствие.
В модели $(\mathbb{R}^2; =, B, \cong)$ не определимы:

- никакая конкретная точка;
- никакая конкретная фигура, за искл. всей плоскости;
- единица длины;
- ориентация;
- направление «вдоль оси x».

Выполнимость

Опр.

Формула $A(b_1, \ldots, b_n)$ сигнатуры Σ *выполнима в модели* $(M; \Sigma)$, если для некоторых $c_1, \ldots, c_n \in M$ $M \vDash A[c_1, \ldots, c_n]$.

Формула A сигнатуры Σ *выполнима*, если она выполнима в некоторой модели $(M; \Sigma)$.

Выполнимость

Опр.

Формула $A(b_1, \ldots, b_n)$ сигнатуры Σ *выполнима в модели* $(M; \Sigma)$, если для некоторых $c_1, \ldots, c_n \in M$ $M \vDash A[c_1, \ldots, c_n]$.

Формула A сигнатуры Σ *выполнима*, если она выполнима в некоторой модели $(M; \Sigma)$.

Утверждение.

$A(b_1, \ldots, b_n)$ *выполнима в* $M \iff M \models \exists x_1 \ldots \exists x_n\, A(x_1, \ldots, x_n)$.

Соглашение: $A(b_1, \ldots, b_n)$ означает, что фиксирован список переменных $b_1, \ldots, b_n$, содержащий все свободные переменные A. Тогда вместо $A[b_1/x_1, \ldots, b_n/x_n]$ пишут $A(x_1, \ldots, x_n)$.

Утверждение.

$A(b_1, \ldots, b_n)$ *выполнима в* $M \iff M \vDash \exists x_1 \ldots \exists x_n\, A(x_1, \ldots, x_n)$.

Соглашение: $A(b_1, \ldots, b_n)$ означает, что фиксирован список переменных $b_1, \ldots, b_n$, содержащий все свободные переменные A. Тогда вместо $A[b_1/x_1, \ldots, b_n/x_n]$ пишут $A(x_1, \ldots, x_n)$.

Опр.

Если $f : \mathsf{FrVar} \to \mathsf{Tm}_\Sigma$ подстановка, то $f(A)$ означает результат применения f к формуле A.

Оценкой на M называем любую подстановку вместо свободных переменных констант сигнатуры $\Sigma(M)$, т.е. функцию $f : \mathsf{FrVar} \to \mathrm{Const}_{\Sigma(M)}$.

Выполнимость множества формул

Опр.

Множество формул Γ сигнатуры Σ *выполнимо в модели* M, если существует оценка f на M такая, что для любой $A \in \Gamma$ $M \vDash f(A)$.

Такую f называем *выполняющей оценкой* для Γ.
Множество формул Γ *выполнимо*, если Γ выполнимо в некоторой модели.

Выполнимость множества формул

Опр.

Множество формул Γ сигнатуры Σ *выполнимо в модели* M, если существует оценка f на M такая, что для любой $A \in \Gamma$ $M \vDash f(A)$.

Такую f называем *выполняющей оценкой* для Γ. Множество формул Γ *выполнимо*, если Γ выполнимо в некоторой модели.

Общезначимость

Опр.

Формула A *общезначима* (*тождественно истинна*), если $\neg A$ не выполнима. Формула A *тождественно ложна*, если A не выполнима.

Пример.

Формулы $P(a) \vee \neg P(a)$, $\exists x \forall y Q(x,y) \to \forall y \exists x\, Q(x,y)$ общезначимы. Формула $P(a_0) \to P(a_1)$ выполнима, но не общезначима.

Общезначимость

Опр.

Формула A *общезначима* (*тождественно истинна*), если $\neg A$ не выполнима. Формула A *тождественно ложна*, если A не выполнима.

Пример.

Формулы $P(a) \vee \neg P(a)$,
$\exists x \forall y Q(x, y) \to \forall y \exists x\, Q(x, y)$ общезначимы.
Формула $P(a_0) \to P(a_1)$ выполнима, но не общезначима.

Логическое следование

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}_\Sigma$ и $A \in \mathrm{Fm}_\Sigma$.

Опр.

Формула A *логически* (или *семантически*) *следует из* Γ, если для любой модели $(M; \Sigma)$ имеем $M \models f(A)$ для любой выполняющей оценки f для множества Γ.

Обозначение: $\Gamma \models A$.

Пример.

$\{P(a) \to Q(b), P(a)\} \models P(a) \wedge \exists x Q(x)$.

Пример.

$P(a) \not\models \forall x P(x)$.

Предложение.

1. A — *общезначима* $\iff \varnothing \models A$.
2. Γ *выполнимо* $\iff \Gamma \not\models \bot$.
3. $\Gamma \models A \iff \Gamma \cup \{\neg A\}$ *не выполнимо.*

Предложение.

$\{B_1, \ldots, B_n\} \models A \iff$
$(\bigwedge_{i=1}^{n} B_i) \to A$ *общезначима.*

Предложение.

1. A — общезначима $\iff \varnothing \models A$.
2. Γ выполнимо $\iff \Gamma \not\models \bot$.
3. $\Gamma \models A \iff \Gamma \cup \{\neg A\}$ не выполнимо.

Предложение.

$\{B_1, \dots, B_n\} \models A \iff$
$(\bigwedge_{i=1}^{n} B_i) \to A$ общезначима.

Эквивалентность формул

Опр.

Формулы A и B сигнатуры Σ равносильны (обозначение $A \equiv B$), если для любой модели $(M; \Sigma)$ и оценки f на M

$$M \models f(A) \iff M \models f(B).$$

Пусть $b_1, \ldots, b_n$ содержит все св. пер. A, B.

Утверждение.

$A \equiv B$, *если и только если для любой модели* M $A_M = B_M$ *(для данного набора переменых).*

Эквивалентность формул

Опр.

Формулы A и B сигнатуры Σ равносильны (обозначение $A \equiv B$), если для любой модели $(M; \Sigma)$ и оценки f на M

$$M \models f(A) \iff M \models f(B).$$

Пусть $b_1, \ldots, b_n$ содержит все св. пер. A, B.

Утверждение.

$A \equiv B$, если и только если для любой модели M $A_M = B_M$ (для данного набора переменых).

Утверждение.

1. *Отношение* $\equiv$ *рефлексивно, симметрично и транзитивно.*
2. $A \equiv B$, *если и только если формула* $A \leftrightarrow B$ *общезначима.*
3. *Формула* A *общезначима тогда и только тогда, когда* $A \equiv \top$.

Основные равносильности с кванторами

Если формулы A, B не содержат связанных переменных x, y, то:

$$
\begin{aligned}
\forall x\, A[a/x] &\equiv \forall y\, A[a/y] \\
\exists x\, A[a/x] &\equiv \exists y\, A[a/y] \\
(\forall x\, A[a/x] \vee B) &\equiv \forall x\, (A[a/x] \vee B) \\
(\exists x\, A[a/x] \vee B) &\equiv \exists x\, (A[a/x] \vee B) \\
(\forall x\, A[a/x] \wedge B) &\equiv \forall x\, (A[a/x] \wedge B) \\
(\exists x\, A[a/x] \wedge B) &\equiv \exists x\, (A[a/x] \wedge B) \\
\neg \forall x A[a/x] &\equiv \exists x \neg A[a/x] \\
\neg \exists x A[a/x] &\equiv \forall x \neg A[a/x]
\end{aligned}
$$

Основные равносильности с кванторами

Если формулы A, B не содержат связанных переменных x, y, то:

$$
\begin{aligned}
\forall x\, A[a/x] &\equiv \forall y\, A[a/y] \\
\exists x\, A[a/x] &\equiv \exists y\, A[a/y] \\
(\forall x\, A[a/x] \vee B) &\equiv \forall x\, (A[a/x] \vee B) \\
(\exists x\, A[a/x] \vee B) &\equiv \exists x\, (A[a/x] \vee B) \\
(\forall x\, A[a/x] \wedge B) &\equiv \forall x\, (A[a/x] \wedge B) \\
(\exists x\, A[a/x] \wedge B) &\equiv \exists x\, (A[a/x] \wedge B) \\
\neg \forall x A[a/x] &\equiv \exists x \neg A[a/x] \\
\neg \exists x A[a/x] &\equiv \forall x \neg A[a/x]
\end{aligned}
$$

Основные равносильности с кванторами

Если формулы A, B не содержат связанных переменных x, y, то:

$$
\begin{aligned}
\forall x\ A[a/x] &\equiv \forall y\ A[a/y] \\
\exists x\ A[a/x] &\equiv \exists y\ A[a/y] \\
(\forall x\ A[a/x] \vee B) &\equiv \forall x\ (A[a/x] \vee B) \\
(\exists x\ A[a/x] \vee B) &\equiv \exists x\ (A[a/x] \vee B) \\
(\forall x\ A[a/x] \wedge B) &\equiv \forall x\ (A[a/x] \wedge B) \\
(\exists x\ A[a/x] \wedge B) &\equiv \exists x\ (A[a/x] \wedge B) \\
\neg\forall x A[a/x] &\equiv \exists x \neg A[a/x] \\
\neg\exists x A[a/x] &\equiv \forall x \neg A[a/x]
\end{aligned}
$$

Основные равносильности с кванторами

Если формулы A, B не содержат связанных переменных x, y, то:

$$
\begin{aligned}
\forall x\; A[a/x] &\equiv \forall y\; A[a/y] \\
\exists x\; A[a/x] &\equiv \exists y\; A[a/y] \\
(\forall x\; A[a/x] \vee B) &\equiv \forall x\; (A[a/x] \vee B) \\
(\exists x\; A[a/x] \vee B) &\equiv \exists x\; (A[a/x] \vee B) \\
(\forall x\; A[a/x] \wedge B) &\equiv \forall x\; (A[a/x] \wedge B) \\
(\exists x\; A[a/x] \wedge B) &\equiv \exists x\; (A[a/x] \wedge B) \\
\neg \forall x A[a/x] &\equiv \exists x \neg A[a/x] \\
\neg \exists x A[a/x] &\equiv \forall x \neg A[a/x]
\end{aligned}
$$

Основные равносильности с кванторами

Если формулы A, B не содержат связанных переменных x, y, то:

$$\begin{array}{rcl}
\forall x\ A[a/x] & \equiv & \forall y\ A[a/y] \\
\exists x\ A[a/x] & \equiv & \exists y\ A[a/y] \\
(\forall x\ A[a/x] \vee B) & \equiv & \forall x\ (A[a/x] \vee B) \\
(\exists x\ A[a/x] \vee B) & \equiv & \exists x\ (A[a/x] \vee B) \\
(\forall x\ A[a/x] \wedge B) & \equiv & \forall x\ (A[a/x] \wedge B) \\
(\exists x\ A[a/x] \wedge B) & \equiv & \exists x\ (A[a/x] \wedge B) \\
\neg\forall x A[a/x] & \equiv & \exists x \neg A[a/x] \\
\neg\exists x A[a/x] & \equiv & \forall x \neg A[a/x]
\end{array}$$

Основные равносильности с кванторами

Если формулы A, B не содержат связанных переменных x, y, то:

$$
\begin{array}{rcl}
\forall x\ A[a/x] & \equiv & \forall y\ A[a/y] \\
\exists x\ A[a/x] & \equiv & \exists y\ A[a/y] \\
(\forall x\ A[a/x] \vee B) & \equiv & \forall x\ (A[a/x] \vee B) \\
(\exists x\ A[a/x] \vee B) & \equiv & \exists x\ (A[a/x] \vee B) \\
(\forall x\ A[a/x] \wedge B) & \equiv & \forall x\ (A[a/x] \wedge B) \\
(\exists x\ A[a/x] \wedge B) & \equiv & \exists x\ (A[a/x] \wedge B) \\
\neg\forall x A[a/x] & \equiv & \exists x \neg A[a/x] \\
\neg\exists x A[a/x] & \equiv & \forall x \neg A[a/x]
\end{array}
$$

Основные равносильности с кванторами

Если формулы A, B не содержат связанных переменных x, y, то:

$$\begin{aligned}
\forall x\, A[a/x] &\equiv \forall y\, A[a/y] \\
\exists x\, A[a/x] &\equiv \exists y\, A[a/y] \\
(\forall x\, A[a/x] \vee B) &\equiv \forall x\, (A[a/x] \vee B) \\
(\exists x\, A[a/x] \vee B) &\equiv \exists x\, (A[a/x] \vee B) \\
(\forall x\, A[a/x] \wedge B) &\equiv \forall x\, (A[a/x] \wedge B) \\
(\exists x\, A[a/x] \wedge B) &\equiv \exists x\, (A[a/x] \wedge B) \\
\neg \forall x A[a/x] &\equiv \exists x \neg A[a/x] \\
\neg \exists x A[a/x] &\equiv \forall x \neg A[a/x]
\end{aligned}$$

Основные равносильности с кванторами

Если формулы A, B не содержат связанных переменных x, y, то:

$$
\begin{array}{rcl}
\forall x\ A[a/x] & \equiv & \forall y\ A[a/y] \\
\exists x\ A[a/x] & \equiv & \exists y\ A[a/y] \\
(\forall x\ A[a/x] \vee B) & \equiv & \forall x\ (A[a/x] \vee B) \\
(\exists x\ A[a/x] \vee B) & \equiv & \exists x\ (A[a/x] \vee B) \\
(\forall x\ A[a/x] \wedge B) & \equiv & \forall x\ (A[a/x] \wedge B) \\
(\exists x\ A[a/x] \wedge B) & \equiv & \exists x\ (A[a/x] \wedge B) \\
\neg \forall x A[a/x] & \equiv & \exists x \neg A[a/x] \\
\neg \exists x A[a/x] & \equiv & \forall x \neg A[a/x]
\end{array}
$$

Расширение языка пропозициональными переменными

- Обогатим язык логики первого порядка пропозициональными переменными. Можно считать переменную P нульместным предикатным символом.
- Распространим на расширенный язык все синтаксические понятия, включая понятие формулы.
- Пропозициональные переменные считаются атомарными формулами.

Подстановка

Опр.
$C[P/A]$ означает результат замены всех вхождений P в формулу C на формулу A.

Замечание.
$C[P/A]$ не всегда является формулой. Если $C = \forall x\,(Q(x) \wedge P)$ и $A = \exists x R(x)$, то

$$C[P/A] = \forall x\,(Q(x) \wedge \exists x R(x))\ .$$

Подстановка

Опр.

$C[P/A]$ означает результат замены всех вхождений P в формулу C на формулу A.

Замечание.

$C[P/A]$ не всегда является формулой. Если $C = \forall x\,(Q(x) \wedge P)$ и $A = \exists x R(x)$, то

$$C[P/A] = \forall x\,(Q(x) \wedge \exists x R(x))\ .$$

Лемма.
$C[P/A]$ — формула, если и только если любое вхождение P в формулу C не находится в области действия квантора по переменной $x \in \mathrm{BdVar}$, входящей в A.

Опр.
Говорим, что *разрешена подстановка формулы A вместо P в C*, если выполнено условие предыдущей леммы.

Лемма.

$C[P/A]$ — формула, если и только если любое вхождение P в формулу C не находится в области действия квантора по переменной $x \in \mathrm{BdVar}$, входящей в A.

Опр.

Говорим, что *разрешена подстановка формулы A вместо P в C*, если выполнено условие предыдущей леммы.

Лемма.

1. Если $A \equiv B$, то $\neg A \equiv \neg B$.
   Если $A_1 \equiv B_1$ и $A_2 \equiv B_2$, то
   $A_1 \wedge A_2 \equiv B_1 \wedge B_2$, $\quad A_1 \vee A_2 \equiv B_1 \vee B_2$,
   $A_1 \rightarrow A_2 \equiv B_1 \rightarrow B_2$.

2. Если $A \equiv B$ и $x \in \mathrm{BdVar}$ не входит в A, B, то
   $\forall x A[a/x] \equiv \forall x B[a/x]$ и $\exists x A[a/x] \equiv \exists x B[a/x]$.

Лемма.

1. Если $A \equiv B$, то $\neg A \equiv \neg B$.
   Если $A_1 \equiv B_1$ и $A_2 \equiv B_2$, то
   $A_1 \wedge A_2 \equiv B_1 \wedge B_2, \quad A_1 \vee A_2 \equiv B_1 \vee B_2,$
   $A_1 \to A_2 \equiv B_1 \to B_2$.

2. Если $A \equiv B$ и $x \in \mathrm{BdVar}$ не входит в A, B, то
   $\forall x A[a/x] \equiv \forall x B[a/x]$ и $\exists x A[a/x] \equiv \exists x B[a/x]$.

Замена подформулы на эквивалентную

Теорема.
Если $A \equiv B$ и разрешена подстановка формул A, B вместо P в C, то $C[P/A] \equiv C[P/B]$.

Доказательство.
Индукция по построению формулы C на основе предыдущей леммы. Рассмотрим лишь случай $C = \forall x D[a/x]$.

Замена подформулы на эквивалентную

Теорема.

Если $A \equiv B$ и разрешена подстановка формул A, B вместо P в C, то $C[P/A] \equiv C[P/B]$.

Доказательство.

Индукция по построению формулы C на основе предыдущей леммы. Рассмотрим лишь случай $C = \forall x D[a/x]$.

- Поскольку $C = \forall x D[a/a'][a'/x]$, можно считать, что a не входит в A, B.
- По предположению индукции $D[P/A] \equiv D[P/B]$.
- В силу подставимости формул A, B в C, x не входит в A, B. Отсюда

$$\forall x D[P/A][a/x] \equiv \forall x D[P/B][a/x].$$

- Поскольку $C = \forall x D[a/a'][a'/x]$, можно считать, что a не входит в A, B.
- По предположению индукции $D[P/A] \equiv D[P/B]$.
- В силу подставимости формул A, B в C, x не входит в A, B. Отсюда

$$\forall x D[P/A][a/x] \equiv \forall x D[P/B][a/x].$$

- Поскольку $C = \forall x D[a/a'][a'/x]$, можно считать, что a не входит в A, B.
- По предположению индукции $D[P/A] \equiv D[P/B]$.
- В силу подставимости формул A, B в C, x не входит в A, B. Отсюда

$$\forall x D[P/A][a/x] \equiv \forall x D[P/B][a/x].$$

- Поскольку a не входит в A, B
  $D[P/A][a/x] = D[a/x][P/A]$.
- Отсюда

$$
\begin{aligned}
(\forall x D[a/x])[P/A] &= (\forall x D[P/A][a/x]) \\
\equiv (\forall x D[P/B][a/x]) &= (\forall x D[a/x])[P/B].
\end{aligned}
$$

- Поскольку a не входит в A, B
$D[P/A][a/x] = D[a/x][P/A]$.
- Отсюда

$$\begin{aligned} (\forall x D[a/x])[P/A] &= (\forall x D[P/A][a/x]) \\ \equiv (\forall x D[P/B][a/x]) &= (\forall x D[a/x])[P/B]. \end{aligned}$$

Замена связанной переменной

Лемма.

Пусть $y \in \mathsf{BdVar}$ не входит в формулу B. Тогда $B[x/y]$ есть формула и $B[x/y] \equiv B$.

Доказательство.

Применяем индукцию по числу вхождений кванторов по переменной x в B. Каждая подформула $\forall x C[a/x]$ или $\exists x C[a/x]$ заменяется на эквивалентную $\forall y C[a/y]$ или $\exists y C[a/y]$.

Замена связанной переменной

Лемма.
Пусть $y \in \mathrm{BdVar}$ не входит в формулу B. Тогда $B[x/y]$ есть формула и $B[x/y] \equiv B$.

Доказательство.
Применяем индукцию по числу вхождений кванторов по переменной x в B. Каждая подформула $\forall x C[a/x]$ или $\exists x C[a/x]$ заменяется на эквивалентную $\forall y C[a/y]$ или $\exists y C[a/y]$.

Семантика расширенного языка

- Пропозициональная переменная P в модели M интерпретируется как логическая константа, то есть $P_M \in \mathbb{B}$.
- Считается $M \vDash P_M$, если $P_M = И$ и $M \nvDash P_M$, если $P_M = Л$.
- Понятие общезначимой формулы распространяется на формулы расширенного языка.

Теорема о подстановке

Теорема.

Пусть формула A общезначима и разрешена подстановка формулы C вместо P в A, тогда общезначима формула $A[P/C]$.

Доказательство.

- Допустим, $M \not\models f(A[P/C])$ при некоторой оценке f.
- Расширим M до модели (M, P) сигнатуры с переменной P: $P_M = И \iff M \models f(C)$.

Теорема о подстановке

Теорема.

Пусть формула A общезначима и разрешена подстановка формулы C вместо P в A, тогда общезначима формула $A[P/C]$.

Доказательство.

- Допустим, $M \not\models f(A[P/C])$ при некоторой оценке f.
- Расширим M до модели (M, P) сигнатуры с переменной P: $P_M = И \iff M \models f(C)$.

- Индукцией по построению формулы B проверим, что

$$(M, P) \models B \iff M \models B[P/C]$$

для любой формулы B, в которую разрешена подстановка C вместо P.
- Отсюда получаем $(M, P) \not\models A$.