Введение в математическую логику

Лекция 4

Лев Дмитриевич Беклемишев
http://lpcs.math.msu.su/vml2010

lbekl@yandex.ru

4.03.2009

Непротиворечивые множества формул

Опр.

Множество формул Γ называется *противоречивым*, если для некоторой формулы A имеем $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \vdash \neg A$.

В противном случае Γ называется *непротиворечивым*.

Свойства

- Если Γ противоречиво, то $\Gamma \vdash B$ для любой формулы B.
- Γ противоречиво, если и только если существует конечное противоречивое подмножество $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$.
- $\Gamma \cup \{B\}$ противоречиво $\iff$ $\Gamma \vdash \neg B$.

Свойства

- Если Γ противоречиво, то $\Gamma \vdash B$ для любой формулы B.
- Γ противоречиво, если и только если существует конечное противоречивое подмножество $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$.
- $\Gamma \cup \{B\}$ противоречиво $\iff$ $\Gamma \vdash \neg B$.

Свойства

- Если Γ противоречиво, то $\Gamma \vdash B$ для любой формулы B.
- Γ противоречиво, если и только если существует конечное противоречивое подмножество $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$.
- $\Gamma \cup \{B\}$ противоречиво $\iff$ $\Gamma \vdash \neg B$.

Опр.

Γ называется *максимальным непротиворечивым* множеством, если

- Γ непротиворечиво;
- Для любой формулы $A \notin \Gamma$
  $\Gamma \cup \{A\}$ противоречиво.

Пример.

Пусть f — фиксированная оценка, тогда множество $\Gamma_f \rightleftharpoons \{A : f(A) = \text{И}\}$ — максимальное непротиворечивое.

Опр.

Γ называется *максимальным непротиворечивым* множеством, если

- Γ непротиворечиво;
- Для любой формулы $A \notin \Gamma$ $\Gamma \cup \{A\}$ противоречиво.

Пример.

Пусть f — фиксированная оценка, тогда множество $\Gamma_f \rightleftharpoons \{A : f(A) = И\}$ — максимальное непротиворечивое.

Теорема Линденбаума

Теорема.

Для всякого непротиворечивого множества формул Δ найдётся максимальное непротиворечивое $\Gamma \supseteq \Delta$.

Доказательство.

Пусть $A_0, A_1, \ldots$ — пересчёт всех формул языка. Определим последовательность множеств

$$\Delta = \Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \cdots \subseteq \Gamma_n \subseteq \ldots$$

и положим $\Gamma \rightleftharpoons \bigcup_{n \geq 0} \Gamma_n$.

Теорема Линденбаума

Теорема.

Для всякого непротиворечивого множества формул Δ найдётся максимальное непротиворечивое $\Gamma \supseteq \Delta$.

Доказательство.

Пусть $A_0, A_1, \ldots$ — пересчёт всех формул языка. Определим последовательность множеств

$$\Delta = \Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \cdots \subseteq \Gamma_n \subseteq \ldots$$

и положим $\Gamma \rightleftharpoons \bigcup_{n \geq 0} \Gamma_n$.

$$\Gamma_0 = \Delta$$

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{A_n\}, \text{ если } \Gamma_n \cup \{A_n\} \text{ непрот.;} \\ \Gamma_n, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Положим $\Gamma \rightleftharpoons \bigcup_{n \geq 0} \Gamma_n$.

Утверждение.

Γ — *максимальное непротиворечивое множество.*

Доказательство.

Непротиворечивость: индукцией по n докажем непротиворечивость каждого Γ_n и воспользуемся свойством компактности.

Максимальность: Допустим $A_k \notin \Gamma$. Тогда $\Gamma_k \cup \{A_k\}$ противоречиво (иначе мы присоединили бы A_k на шаге k). Значит, противоречиво и объемлющее множество $\Gamma \cup \{A_k\}$.

Утверждение.

Γ — *максимальное непротиворечивое множество.*

Доказательство.

Непротиворечивость: индукцией по n докажем непротиворечивость каждого Γ_n и воспользуемся свойством компактности.

Максимальность: Допустим $A_k \notin \Gamma$. Тогда $\Gamma_k \cup \{A_k\}$ противоречиво (иначе мы присоединили бы A_k на шаге k). Значит, противоречиво и объемлющее множество $\Gamma \cup \{A_k\}$.

Утверждение.

Γ — *максимальное непротиворечивое множество.*

Доказательство.

Непротиворечивость: индукцией по n докажем непротиворечивость каждого Γ_n и воспользуемся свойством компактности.

Максимальность: Допустим $A_k \notin \Gamma$. Тогда $\Gamma_k \cup \{A_k\}$ противоречиво (иначе мы присоединили бы A_k на шаге k). Значит, противоречиво и объемлющее множество $\Gamma \cup \{A_k\}$.

Замечание.

Для несчётного языка теорема Линденбаума доказывается, опираясь на лемму Цорна (эквивалентную аксиоме выбора). Заметим, что объединение возрастающей цепи непротиворечивых множеств непротиворечиво.

Свойства максимальных непрот. множеств

Предложение.

Пусть Γ — максимальное непротиворечивое множество. Тогда для любых A, B

а) $\neg A \in \Gamma \iff A \notin \Gamma$;

б) $(A \wedge B) \in \Gamma \iff A \in \Gamma$ и $B \in \Gamma$;

в) $(A \vee B) \in \Gamma \iff A \in \Gamma$ или $B \in \Gamma$;

г) $(A \to B) \in \Gamma \iff A \notin \Gamma$ или $B \in \Gamma$.

Теорема о полноте исчисления высказываний

Теорема.

Множество Γ непротиворечиво тогда и только тогда, когда Γ выполнимо.

Доказательство.

(Выполнимость влечёт непротиворечивость.)

Пусть f — такая оценка, что $f(A) = И$ для всех формул $A \in \Gamma$. Индукцией по построению вывода убедимся, что $f(B) = И$ для любой формулы B такой, что $\Gamma \vdash B$. Тем самым, $\Gamma \nvdash C, \neg C$ ни для какой C.

(Непротиворечивость влечёт выполнимость.)
Допустим, что Γ непротиворечиво.

- По теореме Линденбаума расширим Γ до максимального непротиворечивого множества формул Δ.
- Определим оценку $f = f_\Delta$ следующим образом: для любой переменной P

$$f(P) = \text{И} \overset{\text{def}}{\iff} P \in \Delta.$$

Лемма.

Для любой формулы A

$f(A) = \text{И} \iff A \in \Delta$.

Доказательство.

Рассмотрим случаи:

- $A \in \mathrm{Var}$ — по определению f.
- $A = \neg B$. Тогда

$$\begin{aligned} f(\neg B) = \text{И} &\iff f(B) \neq \text{И} \\ &\iff B \notin \Delta \\ &\iff (\neg B) \in \Delta. \end{aligned}$$

Лемма.

Для любой формулы A
$f(A) = \text{И} \iff A \in \Delta$.

Доказательство.

Рассмотрим случаи:

- $A \in \mathrm{Var}$ — по определению f.
- $A = \neg B$. Тогда

$$\begin{aligned} f(\neg B) = \text{И} &\iff f(B) \neq \text{И} \\ &\iff B \notin \Delta \\ &\iff (\neg B) \in \Delta. \end{aligned}$$

Лемма.
Для любой формулы A
$f(A) = \text{И} \iff A \in \Delta$.

Доказательство.
Рассмотрим случаи:

- $A \in \mathrm{Var}$ — по определению f.
- $A = \neg B$. Тогда

$$
\begin{aligned}
f(\neg B) = \text{И} &\iff f(B) \neq \text{И} \\
&\iff B \notin \Delta \\
&\iff (\neg B) \in \Delta.
\end{aligned}
$$

Лемма.

Для любой формулы A

$f(A) = \text{И} \iff A \in \Delta.$

Доказательство.

Рассмотрим случаи:

- $A \in \mathrm{Var}$ — по определению f.
- $A = \neg B$. Тогда

$$\begin{aligned} f(\neg B) = \text{И} &\iff f(B) \neq \text{И} \\ &\iff B \notin \Delta \\ &\iff (\neg B) \in \Delta. \end{aligned}$$

Лемма.

Для любой формулы A

$f(A) = \text{И} \iff A \in \Delta$.

Доказательство.

Рассмотрим случаи:

- $A \in \mathrm{Var}$ — по определению f.
- $A = \neg B$. Тогда

$$\begin{aligned} f(\neg B) = \text{И} \quad &\iff \quad f(B) \neq \text{И} \\ &\iff \quad B \notin \Delta \\ &\iff \quad (\neg B) \in \Delta. \end{aligned}$$

Лемма.

Для любой формулы A
$f(A) = И \iff A \in \Delta$.

Доказательство.

Рассмотрим случаи:

- $A \in \mathrm{Var}$ — по определению f.
- $A = \neg B$. Тогда

$$\begin{aligned} f(\neg B) = И &\iff f(B) \neq И \\ &\iff B \notin \Delta \\ &\iff (\neg B) \in \Delta. \end{aligned}$$

- $A = (B \to C)$. Аналогично получаем

$$\begin{aligned} f(B \to C) = И &\iff (f(B) \neq И \text{ или } f(C) = И) \\ &\iff (B \notin \Delta \text{ или } C \in \Delta) \\ &\iff (B \to C) \in \Delta. \end{aligned}$$

Оставшиеся случаи рассматриваются аналогично.
Лемма доказана.

- $A = (B \to C)$. Аналогично получаем

$$
\begin{aligned}
f(B \to C) = \text{И} \quad &\Longleftrightarrow \quad (f(B) \neq \text{И} \text{ или } f(C) = \text{И}) \\
&\Longleftrightarrow \quad (B \notin \Delta \text{ или } C \in \Delta) \\
&\Longleftrightarrow \quad (B \to C) \in \Delta.
\end{aligned}
$$

Оставшиеся случаи рассматриваются аналогично.
Лемма доказана.

- $A = (B \to C)$. Аналогично получаем

$$\begin{aligned} f(B \to C) = \text{И} \quad &\Longleftrightarrow \quad (f(B) \neq \text{И} \text{ или } f(C) = \text{И}) \\ &\Longleftrightarrow \quad (B \notin \Delta \text{ или } C \in \Delta) \\ &\Longleftrightarrow \quad (B \to C) \in \Delta. \end{aligned}$$

Оставшиеся случаи рассматриваются аналогично.
Лемма доказана.

- $A = (B \to C)$. Аналогично получаем

$$\begin{aligned} f(B \to C) = \text{И} \quad & \Longleftrightarrow \quad (f(B) \neq \text{И} \text{ или } f(C) = \text{И}) \\ & \Longleftrightarrow \quad (B \notin \Delta \text{ или } C \in \Delta) \\ & \Longleftrightarrow \quad (B \to C) \in \Delta. \end{aligned}$$

Оставшиеся случаи рассматриваются аналогично. Лемма доказана.

- $A = (B \to C)$. Аналогично получаем

$$\begin{aligned} f(B \to C) = \text{И} \quad &\Longleftrightarrow \quad (f(B) \neq \text{И} \text{ или } f(C) = \text{И}) \\ &\Longleftrightarrow \quad (B \notin \Delta \text{ или } C \in \Delta) \\ &\Longleftrightarrow \quad (B \to C) \in \Delta. \end{aligned}$$

Оставшиеся случаи рассматриваются аналогично. Лемма доказана.

Из леммы вытекает выполнимость Γ при данной оценке f:

Поскольку $\Gamma \subseteq \Delta$, для любой $A \in \Gamma$ получаем $f(A) = И$, что и требовалось доказать.

Теорема. (полнота)

Всякая тавтология выводима в исчислении высказываний.

Теорема. (сильная полнота)

Для любого множества формул Γ и любой формулы A

$$\Gamma \models A \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash A.$$

Теорема. (полнота)

Всякая тавтология выводима в исчислении высказываний.

Теорема. (сильная полнота)

Для любого множества формул Γ и любой формулы A

$$\Gamma \models A \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash A.$$

Доказательство.

$\Gamma \models A$ влечёт невыполнимость множества $\Gamma \cup \{\neg A\}$.

По доказанной теореме множество $\Gamma \cup \{\neg A\}$ противоречиво и тем самым $\Gamma \vdash \neg\neg A \vdash A$.

Следствия

Семантическое следование в логике высказываний равносильно выводимости из гипотез:

Следствие.
$\Gamma \vDash A \iff \Gamma \vdash A$.

Следствие.
(компактность)
$\Gamma \vDash A \iff \Gamma_0 \vDash A$ для любого конечного подмножества $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$.

Следствия

Семантическое следование в логике высказываний равносильно выводимости из гипотез:

Следствие.
$\Gamma \models A \iff \Gamma \vdash A$.

Следствие.
(компактность)
$\Gamma \models A \iff \Gamma_0 \models A$ для любого конечного подмножества $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$.

Следствия

Семантическое следование в логике высказываний равносильно выводимости из гипотез:

Следствие.
$\Gamma \models A \iff \Gamma \vdash A$.

Следствие.
(компактность)
$\Gamma \models A \iff \Gamma_0 \models A$ для любого конечного подмножества $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$.

Свойства максимальных непрот. множеств

Предложение.

Пусть Γ — максимальное непротиворечивое множество. Тогда для любых A, B

а) $\neg A \in \Gamma \iff A \notin \Gamma$;

б) $(A \wedge B) \in \Gamma \iff A \in \Gamma$ *и* $B \in \Gamma$;

в) $(A \vee B) \in \Gamma \iff A \in \Gamma$ *или* $B \in \Gamma$;

г) $(A \to B) \in \Gamma \iff A \notin \Gamma$ *или* $B \in \Gamma$.

Доказательство.

а) $\neg A \in \Gamma \iff A \notin \Gamma$.

Рассуждаем от противного.

$(\Rightarrow)$ Если $A, \neg A \in \Gamma$, то Γ противоречиво.

$(\Leftarrow)$ Если же $A, \neg A \notin \Gamma$, то противоречивы $\Gamma \cup \{A\}$ и $\Gamma \cup \{\neg A\}$ в силу максимальности. Отсюда $\Gamma \vdash \neg A, \neg\neg A$, т.е. Γ противоречиво.

Доказательство.

а) $\neg A \in \Gamma \iff A \notin \Gamma$.

Рассуждаем от противного.

$(\Rightarrow)$ Если $A, \neg A \in \Gamma$, то Γ противоречиво.

$(\Leftarrow)$ Если же $A, \neg A \notin \Gamma$, то противоречивы $\Gamma \cup \{A\}$ и $\Gamma \cup \{\neg A\}$ в силу максимальности. Отсюда $\Gamma \vdash \neg A, \neg\neg A$, т.е. Γ противоречиво.

Доказательство.

а) $\neg A \in \Gamma \iff A \notin \Gamma$.

Рассуждаем от противного.

$(\Rightarrow)$ Если $A, \neg A \in \Gamma$, то Γ противоречиво.

$(\Leftarrow)$ Если же $A, \neg A \notin \Gamma$, то противоречивы $\Gamma \cup \{A\}$ и $\Gamma \cup \{\neg A\}$ в силу максимальности. Отсюда $\Gamma \vdash \neg A, \neg\neg A$, т.е. Γ противоречиво.

б) $(A \wedge B) \in \Gamma \iff A \in \Gamma$ и $B \in \Gamma$

$(\Rightarrow)$ Пусть $(A \wedge B) \in \Gamma$, $A \notin \Gamma$.

Тогда, в силу максимальности, $\Gamma \cup \{A\}$ противоречиво, откуда $\Gamma \vdash \neg A$.

С другой стороны, $A \wedge B \vdash A$, поэтому $\Gamma \vdash A$, т.е. Γ противоречиво.

Аналогично рассматриваем случай $(A \wedge B) \in \Gamma$, $B \notin \Gamma$.

б) $(A \wedge B) \in \Gamma \iff A \in \Gamma$ и $B \in \Gamma$

$(\Rightarrow)$ Пусть $(A \wedge B) \in \Gamma$, $A \notin \Gamma$.

Тогда, в силу максимальности, $\Gamma \cup \{A\}$ противоречиво, откуда $\Gamma \vdash \neg A$.

С другой стороны, $A \wedge B \vdash A$, поэтому $\Gamma \vdash A$, т.е. Γ противоречиво.

Аналогично рассматриваем случай $(A \wedge B) \in \Gamma$, $B \notin \Gamma$.

б) $(A \wedge B) \in \Gamma \iff A \in \Gamma$ и $B \in \Gamma$

$(\Rightarrow)$ Пусть $(A \wedge B) \in \Gamma$, $A \notin \Gamma$.

Тогда, в силу максимальности, $\Gamma \cup \{A\}$ противоречиво, откуда $\Gamma \vdash \neg A$.

С другой стороны, $A \wedge B \vdash A$, поэтому $\Gamma \vdash A$, т.е. Γ противоречиво.

Аналогично рассматриваем случай $(A \wedge B) \in \Gamma$, $B \notin \Gamma$.

б) $(A \wedge B) \in \Gamma \iff A \in \Gamma$ и $B \in \Gamma$

$(\Rightarrow)$ Пусть $(A \wedge B) \in \Gamma$, $A \notin \Gamma$.

Тогда, в силу максимальности, $\Gamma \cup \{A\}$ противоречиво, откуда $\Gamma \vdash \neg A$.

С другой стороны, $A \wedge B \vdash A$, поэтому $\Gamma \vdash A$, т.е. Γ противоречиво.

Аналогично рассматриваем случай $(A \wedge B) \in \Gamma$, $B \notin \Gamma$.

$(\Leftarrow)$ Пусть $(A \wedge B) \notin \Gamma$ и $A, B \in \Gamma$. Тогда по максимальности $\Gamma \vdash \neg(A \wedge B)$.

С другой стороны, по аксиоме $A \to (B \to (A \wedge B))$ имеем $\Gamma \vdash A \wedge B$.

$(\Leftarrow)$ Пусть $(A \wedge B) \notin \Gamma$ и $A, B \in \Gamma$. Тогда по максимальности $\Gamma \vdash \neg(A \wedge B)$.

С другой стороны, по аксиоме $A \to (B \to (A \wedge B))$ имеем $\Gamma \vdash A \wedge B$.

г) $(A \to B) \in \Gamma \iff A \notin \Gamma$ или $B \in \Gamma$

$(\Rightarrow)$ Допустим $(A \to B) \in \Gamma$, $A \in \Gamma$, $B \notin \Gamma$. Тогда $\Gamma \cup \{B\}$ противоречиво, откуда $\Gamma \vdash \neg B$.

С другой стороны, по правилу modus ponens $\Gamma \vdash B$, т.е. Γ противоречиво.

г) $(A \to B) \in \Gamma \iff A \notin \Gamma$ или $B \in \Gamma$

$(\Rightarrow)$ Допустим $(A \to B) \in \Gamma$, $A \in \Gamma$, $B \notin \Gamma$. Тогда $\Gamma \cup \{B\}$ противоречиво, откуда $\Gamma \vdash \neg B$.

С другой стороны, по правилу modus ponens $\Gamma \vdash B$, т.е. Γ противоречиво.

г) $(A \to B) \in \Gamma \iff A \notin \Gamma$ или $B \in \Gamma$

$(\Rightarrow)$ Допустим $(A \to B) \in \Gamma$, $A \in \Gamma$, $B \notin \Gamma$. Тогда $\Gamma \cup \{B\}$ противоречиво, откуда $\Gamma \vdash \neg B$.

С другой стороны, по правилу modus ponens $\Gamma \vdash B$, т.е. Γ противоречиво.

$(\Leftarrow)$ Допустим $(A \to B) \notin \Gamma$, $A \notin \Gamma$. Тогда в силу максимальности $\Gamma \vdash \neg A$, $\Gamma \vdash \neg(A \to B)$.

Заметим, что $\neg(A \to B) \vdash A$.
Из $A, \neg A \vdash B$ получаем $\neg A \vdash A \to B$, отсюда с помощью контрапозиции и снятия двойного отрицания
$\neg(A \to B) \vdash \neg\neg A \vdash A$.

Поскольку $\Gamma \vdash \neg(A \to B)$, отсюда получаем $\Gamma \vdash A$, т.е. Γ противоречиво.

$(\Leftarrow)$ Допустим $(A \to B) \notin \Gamma$, $A \notin \Gamma$. Тогда в силу максимальности $\Gamma \vdash \neg A$, $\Gamma \vdash \neg(A \to B)$.

Заметим, что $\neg(A \to B) \vdash A$.
Из $A, \neg A \vdash B$ получаем $\neg A \vdash A \to B$, отсюда с помощью контрапозиции и снятия двойного отрицания
$\neg(A \to B) \vdash \neg\neg A \vdash A$.

Поскольку $\Gamma \vdash \neg(A \to B)$, отсюда получаем $\Gamma \vdash A$, т.е. Γ противоречиво.

$(\Leftarrow)$ Допустим $(A \to B) \notin \Gamma$, $A \notin \Gamma$. Тогда в силу максимальности $\Gamma \vdash \neg A$, $\Gamma \vdash \neg(A \to B)$.

Заметим, что $\neg(A \to B) \vdash A$.
Из $A, \neg A \vdash B$ получаем $\neg A \vdash A \to B$, отсюда с помощью контрапозиции и снятия двойного отрицания
$\neg(A \to B) \vdash \neg\neg A \vdash A.$

Поскольку $\Gamma \vdash \neg(A \to B)$, отсюда получаем $\Gamma \vdash A$, т.е. Γ противоречиво.

Случай $(A \to B) \notin \Gamma$, $B \in \Gamma$ рассматривается аналогично, с использованием выводимости $\neg(A \to B) \vdash \neg B$. Последняя вытекает с помощью контрапозиции из очевидного $B \vdash A \to B$.

Другие варианты исчисления высказываний

- Секвенциальные (*генценовские*) исчисления
- Исчисления натурального вывода
- Исчисления эквивалентностей
- Исчисления резолюций
- Алгебраические исчисления
- и т.д.

Исчисление эквивалентностей

- Оперируем с формальными выражениями вида $A \equiv B$.

Аксиомы:

$A \wedge B$	$\equiv$	$B \wedge A$	$A \vee B$	$\equiv$	$B \vee A$
$A \wedge (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \wedge C$	$A \vee (B \vee C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \vee C$
$A \wedge A$	$\equiv$	A	$A \vee A$	$\equiv$	A
$A \wedge (B \vee C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
$A \vee (A \wedge B)$	$\equiv$	A	$A \wedge (A \vee B)$	$\equiv$	A
$\neg(A \wedge B)$	$\equiv$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg(A \vee B)$	$\equiv$	$\neg A \wedge \neg B$
$\neg\neg A$	$\equiv$	A	$A \to B$	$\equiv$	$\neg A \vee B$
$A \wedge \neg A$	$\equiv$	$\perp$	$A \vee \neg A$	$\equiv$	$\top$

Исчисление эквивалентностей

- Оперируем с формальными выражениями вида $A \equiv B$.

Аксиомы:

$A \wedge B$	$\equiv$	$B \wedge A$	$A \vee B$	$\equiv$	$B \vee A$
$A \wedge (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \wedge C$	$A \vee (B \vee C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \vee C$
$A \wedge A$	$\equiv$	A	$A \vee A$	$\equiv$	A
$A \wedge (B \vee C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
$A \vee (A \wedge B)$	$\equiv$	A	$A \wedge (A \vee B)$	$\equiv$	A
$\neg(A \wedge B)$	$\equiv$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg(A \vee B)$	$\equiv$	$\neg A \wedge \neg B$
$\neg\neg A$	$\equiv$	A	$A \to B$	$\equiv$	$\neg A \vee B$
$A \wedge \neg A$	$\equiv$	$\perp$	$A \vee \neg A$	$\equiv$	$\top$

Правила вывода:

$$\frac{B \equiv A}{A \equiv B} \text{ (симметричность)}$$

$$\frac{A \equiv B \quad B \equiv C}{A \equiv C} \text{ (транзитивность)}$$

$$\frac{A \equiv B}{C[P/A] \equiv C[P/B]} \text{ (экв. замена)}$$

Теорема о полноте

Теорема.

Равносильность $A \equiv B$ выводима $\iff$ формулы A и B (семантически) эквивалентны.

Доказательство.

Пусть A и B равносильны. Приведём A и B к графически равным СДНФ A' и B'. При этом достаточно использовать лишь аксиомы исчисления равносильностей. Это даёт выводы $A \equiv A'$ и $B \equiv B'$. По правилам симметричности и транзитивности выводим $A \equiv B$.

Теорема о полноте

Теорема.

Равносильность $A \equiv B$ выводима $\Longleftrightarrow$ формулы A и B (семантически) эквивалентны.

Доказательство.

Пусть A и B равносильны. Приведём A и B к графически равным СДНФ A' и B'. При этом достаточно использовать лишь аксиомы исчисления равносильностей. Это даёт выводы $A \equiv A'$ и $B \equiv B'$. По правилам симметричности и транзитивности выводим $A \equiv B$.

Другие варианты формальной семантики

- Теоретико-множественная семантика.

Пусть U — непустое множество; $\mathcal{P}(U)$ — множество всех его подмножеств.

Оценка $f : \mathrm{Var} \to \mathcal{P}(U)$.

Значение $f(A) \subseteq U$ формулы A при оценке f определяется по правилам:

- $f(\neg A) \rightleftharpoons U \setminus f(A)$
- $f(A \wedge B) \rightleftharpoons f(A) \cap f(B)$
- $f(A \vee B) \rightleftharpoons f(A) \cup f(B)$
- $f(A \to B) \rightleftharpoons (U \setminus f(A)) \cup f(B)$

Значение $f(A) \subseteq U$ формулы A при оценке f определяется по правилам:

- $f(\neg A) \rightleftharpoons U \setminus f(A)$
- $f(A \wedge B) \rightleftharpoons f(A) \cap f(B)$
- $f(A \vee B) \rightleftharpoons f(A) \cup f(B)$
- $f(A \to B) \rightleftharpoons (U \setminus f(A)) \cup f(B)$

Значение $f(A) \subseteq U$ формулы A при оценке f определяется по правилам:

- $f(\neg A) \rightleftharpoons U \setminus f(A)$
- $f(A \wedge B) \rightleftharpoons f(A) \cap f(B)$
- $f(A \vee B) \rightleftharpoons f(A) \cup f(B)$
- $f(A \to B) \rightleftharpoons (U \setminus f(A)) \cup f(B)$

Значение $f(A) \subseteq U$ формулы A при оценке f определяется по правилам:

- $f(\neg A) \rightleftharpoons U \setminus f(A)$
- $f(A \wedge B) \rightleftharpoons f(A) \cap f(B)$
- $f(A \vee B) \rightleftharpoons f(A) \cup f(B)$
- $f(A \to B) \rightleftharpoons (U \setminus f(A)) \cup f(B)$

Значение $f(A) \subseteq U$ формулы A при оценке f определяется по правилам:

- $f(\neg A) \rightleftharpoons U \setminus f(A)$
- $f(A \wedge B) \rightleftharpoons f(A) \cap f(B)$
- $f(A \vee B) \rightleftharpoons f(A) \cup f(B)$
- $f(A \to B) \rightleftharpoons (U \setminus f(A)) \cup f(B)$

Замечание.
Если взять $U = \{0\}$, теоретико-множественная семантика сводится к стандартной двузначной: $Л = \varnothing$, $И = U$.

Замечание.
Если взять $U = \mathbb{R}^2$ и если для $P \in \mathrm{Var}$ $f(P)$ — круги на плоскости, получаем *диаграммы Венна*, известные из школы.

- Алгебраическая семантика.

Опр.

Множество **B** с заданными на нём константами 0, 1 и операциями $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, которые удовлетворяют равенствам

$$a \wedge \neg a = 0, \quad a \vee \neg a = 1$$

и равенствам, соответствующим таблице основных эквивалентностей, называется *булевой алгеброй*.

(Читаем $\equiv$ как $=$; a, b, c означают элементы множества **B**.)

$a \wedge b$	$=$	$b \wedge a$	$a \vee b$	$=$	$b \vee a$
$a \wedge (b \wedge c)$	$=$	$(a \wedge b) \wedge c$	$a \vee (b \vee c)$	$=$	$(a \vee b) \vee c$
$a \wedge a$	$=$	a	$a \vee a$	$=$	a
$a \wedge (b \vee c)$	$=$	$(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	$a \vee (b \wedge c)$	$=$	$(a \vee b) \wedge (a \vee c)$
$a \vee (a \wedge b)$	$=$	a	$a \wedge (a \vee b)$	$=$	a
$\neg(a \wedge b)$	$=$	$\neg a \vee \neg b$	$\neg(a \vee b)$	$=$	$\neg a \wedge \neg b$
$\neg\neg a$	$=$	a	$a \rightarrow b$	$=$	$\neg a \vee b$
$a \wedge \neg a$	$=$	0	$a \vee \neg a$	$=$	1

Пример.

$$a \vee 1 = a \vee (a \vee \neg a) = (a \vee a) \vee \neg a = a \vee \neg a = 1$$

$$a \wedge 1 = a \wedge (a \wedge 1) = a \wedge (a \vee (a \wedge \neg a)) = a \wedge (a \vee 0) = a$$

$a \wedge b$	$=$	$b \wedge a$	$a \vee b$	$=$	$b \vee a$
$a \wedge (b \wedge c)$	$=$	$(a \wedge b) \wedge c$	$a \vee (b \vee c)$	$=$	$(a \vee b) \vee c$
$a \wedge a$	$=$	a	$a \vee a$	$=$	a
$a \wedge (b \vee c)$	$=$	$(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	$a \vee (b \wedge c)$	$=$	$(a \vee b) \wedge (a \vee c)$
$a \vee (a \wedge b)$	$=$	a	$a \wedge (a \vee b)$	$=$	a
$\neg(a \wedge b)$	$=$	$\neg a \vee \neg b$	$\neg(a \vee b)$	$=$	$\neg a \wedge \neg b$
$\neg\neg a$	$=$	a	$a \rightarrow b$	$=$	$\neg a \vee b$
$a \wedge \neg a$	$=$	0	$a \vee \neg a$	$=$	1

Пример.

$$a \vee 1 = a \vee (a \vee \neg a) = (a \vee a) \vee \neg a = a \vee \neg a = 1$$

$$a \wedge 1 = a \wedge (a \wedge 1) = a \wedge (a \vee (a \wedge \neg a)) = a \wedge (a \vee 0) = a$$

Примеры булевых алгебр

- $\mathbb{B}$
- $\mathcal{P}(U)$ для любого U
- $\mathrm{Fm}/\equiv$ (*алгебра Линденбаума*), то есть множество классов равносильных формул с синтаксически определёнными операциями $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\neg$.

Примеры булевых алгебр

- $\mathbb{B}$
- $\mathcal{P}(U)$ для любого U
- $\mathrm{Fm}/\equiv$ (*алгебра Линденбаума*), то есть множество классов равносильных формул с синтаксически определёнными операциями $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$.

Примеры булевых алгебр

- $\mathbb{B}$
- $\mathcal{P}(U)$ для любого U
- $\mathrm{Fm}/\equiv$ (*алгебра Линденбаума*), то есть множество классов равносильных формул с синтаксически определёнными операциями $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$.

Оценка $f : \mathrm{Var} \to \mathbf{B}$.
Значение $f(A) \in \mathbf{B}$ формулы A вычисляется в соответствии с заданными на $\mathbf{B}$ операциями.

Каждая из указанных семантик задаёт одно и то же множество тавтологий, то есть имеет место следующая теорема (без доказательства).

Теорема.

Для любого множества U и любой булевой алгебры $\boldsymbol{B}$ равносильны следующие утверждения.

1. A — *тавтология;*
2. $f(A) = U$ *для любой оценки* $f : \mathrm{Var} \to \mathcal{P}(U)$;
3. $f(A) = 1$ *для любой оценки* $f : \mathrm{Var} \to \boldsymbol{B}$.