Логика высказываний
лекция 2

Лев Дмитриевич Беклемишев
http://lpcs.math.msu.su/vml2010

http://www.mi.ras.ru/~bekl
lbekl@yandex.ru

18.02.2010

Логика высказываний

- *Связки*: $\wedge, \vee, \to, \neg$.
- *Истинностные значения:* $\mathbb{B} = \{\text{Л}, \text{И}\}$.
- *Булевы функции*: $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$.
- *Оценка*: функция $f : \mathrm{Var} \to \mathbb{B}$.
- $f(A) =$ *значение* формулы A при оценке f.
- $\varphi_A : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ функция, определяемая таблицей истинности формулы A.
- $\forall f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B} \;\; \exists A \;\; f = \varphi_A$.

Логика высказываний

- *Связки*: $\wedge, \vee, \to, \neg$.
- *Истинностные значения:* $\mathbb{B} = \{\text{Л}, \text{И}\}$.
- *Булевы функции*: $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$.
- *Оценка*: функция $f : \mathrm{Var} \to \mathbb{B}$.
- $f(A) =$ *значение* формулы A при оценке f.
- $\varphi_A : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ функция, определяемая таблицей истинности формулы A.
- $\forall f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B} \;\; \exists A \;\; f = \varphi_A$.

Логика высказываний

- *Связки*: $\wedge, \vee, \to, \neg$.
- *Истинностные значения:* $\mathbb{B} = \{\text{Л}, \text{И}\}$.
- *Булевы функции*: $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$.
- *Оценка*: функция $f : \mathrm{Var} \to \mathbb{B}$.
- $f(A)$ = *значение* формулы A при оценке f.
- $\varphi_A : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ функция, определяемая таблицей истинности формулы A.
- $\forall f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B} \quad \exists A \quad f = \varphi_A$.

Логика высказываний

- *Связки*: $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$.
- *Истинностные значения:* $\mathbb{B} = \{\text{Л}, \text{И}\}$.
- *Булевы функции*: $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$.
- *Оценка*: функция $f : \mathrm{Var} \rightarrow \mathbb{B}$.
- $f(A) =$ *значение* формулы A при оценке f.
- $\varphi_A : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ функция, определяемая таблицей истинности формулы A.
- $\forall f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B} \quad \exists A \quad f = \varphi_A$.

Выполнимые формулы

Опр.

Формула A *выполнима*, если $\exists f: \ f(A) = \text{И}$.

Опр.

Множество формул Γ *выполнимо*, если
$\exists f \ \forall A \in \Gamma \ f(A) = \text{И}$.

Такая оценка f называется *выполняющей* для Γ.

Тавтологии

Опр.

Формула A — *тавтология*, если $\forall f \; f(A) = \text{И}$.

Опр.

Формула A — *тождественно ложна*, если $\forall f \; f(A) = \text{Л}$.

Предложение.

Следующие условия равносильны.

1. *Формула A тождественно ложна.*
2. *Формула A не выполнима.*
3. *Формула $\neg A$ — тавтология.*

Пример.

$\neg(P \to P)$ тождественно ложна (и не выполнима); $P \to P$ тавтология; $P \to Q$ выполнима, но не тавтология.

Проверка формулы на выполнимость

Очевидный алгоритм — перебор всех 2^n возможных оценок.

Открытый вопрос: существует ли алгортм, проверяющий формулу на выполнимость за полиномиальное число шагов (от длины формулы).

Проверка формулы на выполнимость — стандартный пример NP-полной задачи, поэтому этот вопрос эквивалентен знаменитой проблеме P=NP?.

Логическое следование

Опр.

Формула A *логически следует* (или *семантически следует*) из множества формул Γ, если $f(A) = И$ для любой выполняющей оценки f для Γ.

Обозначение: $\Gamma \vDash A$.

Пример.

$\{P \vee Q, R, \neg Q\} \vDash P \wedge R$.

Логическое следование

Опр.

Формула A *логически следует* (или *семантически следует*) из множества формул Γ, если $f(A) = \text{И}$ для любой выполняющей оценки f для Γ.

Обозначение: $\Gamma \models A$.

Пример.

$\{P \vee Q, R, \neg Q\} \models P \wedge R$.

Предложение.

1. A — тавтология $\iff \varnothing \models A$.
2. Γ выполнимо $\iff \Gamma \not\models \perp$, где $\perp \rightleftharpoons (P \wedge \neg P)$.
3. $\Gamma \models A \iff \Gamma \cup \{\neg A\}$ не выполнимо.

Предложение.

1. A — *тавтология* $\iff \varnothing \models A$.
2. Γ *выполнимо* $\iff \Gamma \not\models \bot$, где $\bot \leftrightharpoons (P \wedge \neg P)$.
3. $\Gamma \models A \iff \Gamma \cup \{\neg A\}$ *не выполнимо*.

Предложение.

1. A — *тавтология* $\iff \varnothing \models A$.
2. Γ *выполнимо* $\iff \Gamma \not\models \bot$, *где* $\bot \rightleftharpoons (P \wedge \neg P)$.
3. $\Gamma \models A \iff \Gamma \cup \{\neg A\}$ *не выполнимо.*

Логическое следование из конечного множества формул сводится к понятию тавтологии.

Предложение.

$\{B_1, \ldots, B_n\} \models A \iff (\bigwedge_{i=1}^{n} B_i) \to A$ — *тавтология.*

Равносильные формулы

Опр.

Формулы A и B называются *равносильными* (*эквивалентными*), если $\forall f \; f(A) = f(B)$.

Обозначение: $A \equiv B$.

Пример.

$P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P; \quad P \to Q \not\equiv \neg P \to \neg Q$.

Равносильные формулы

Опр.

Формулы A и B называются *равносильными* (*эквивалентными*), если $\forall f \ f(A) = f(B)$.

Обозначение: $A \equiv B$.

Пример.

$P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P$; $P \to Q \not\equiv \neg P \to \neg Q$.

Предложение.

Пусть $\mathrm{Var} = \{P_1, \ldots, P_n\}$ *содержит все переменные, входящие в* A *и* B.

Тогда $A \equiv B$, *если и только если* $\varphi_A = \varphi_B$.

Утверждение.

1. Отношение $\equiv$ рефлексивно, симметрично и транзитивно.
2. $A \equiv B \iff A \leftrightarrow B$ — тавтология, где $A \leftrightarrow B \rightleftharpoons ((A \to B) \wedge (B \to A))$.
3. A — тавтология $\iff A \equiv \top$, где $\top \rightleftharpoons \neg\bot$.

Утверждение.

1. *Отношение* $\equiv$ *рефлексивно, симметрично и транзитивно.*
2. $A \equiv B \iff A \leftrightarrow B$ — *тавтология*, где $A \leftrightarrow B \rightleftharpoons ((A \to B) \wedge (B \to A))$.
3. A — *тавтология* $\iff A \equiv \top$, *где* $\top \rightleftharpoons \neg\bot$.

Утверждение.

1. *Отношение* $\equiv$ *рефлексивно, симметрично и транзитивно.*
2. $A \equiv B \iff A \leftrightarrow B$ — *тавтология*, где $A \leftrightarrow B \rightleftharpoons ((A \to B) \wedge (B \to A))$.
3. A — *тавтология* $\iff A \equiv \top$, где $\top \rightleftharpoons \neg\bot$.

Основные равносильности

$A \wedge B$	$\equiv$	$B \wedge A$	$A \vee B$	$\equiv$	$B \vee A$
$A \wedge (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \wedge C$	$A \vee (B \vee C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \vee C$
$A \wedge A$	$\equiv$	A	$A \vee A$	$\equiv$	A
$A \wedge (B \vee C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
$A \vee (A \wedge B)$	$\equiv$	A	$A \wedge (A \vee B)$	$\equiv$	A
$\neg(A \wedge B)$	$\equiv$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg(A \vee B)$	$\equiv$	$\neg A \wedge \neg B$
$\neg\neg A$	$\equiv$	A	$A \to B$	$\equiv$	$\neg A \vee B$

Основные равносильности

$A \wedge B \equiv B \wedge A$	$A \vee B \equiv B \vee A$
$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$	$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$
$A \wedge A \equiv A$	$A \vee A \equiv A$
$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
$A \vee (A \wedge B) \equiv A$	$A \wedge (A \vee B) \equiv A$
$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$	$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
$\neg\neg A \equiv A$	$A \to B \equiv \neg A \vee B$

Основные равносильности

$A \wedge B \equiv B \wedge A$	$A \vee B \equiv B \vee A$
$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$	$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$
$A \wedge A \equiv A$	$A \vee A \equiv A$
$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
$A \vee (A \wedge B) \equiv A$	$A \wedge (A \vee B) \equiv A$
$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$	$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
$\neg\neg A \equiv A$	$A \to B \equiv \neg A \vee B$

Основные равносильности

$A \wedge B \equiv B \wedge A$	$A \vee B \equiv B \vee A$
$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$	$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$
$A \wedge A \equiv A$	$A \vee A \equiv A$
$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
$A \vee (A \wedge B) \equiv A$	$A \wedge (A \vee B) \equiv A$
$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$	$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
$\neg\neg A \equiv A$	$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

Основные равносильности

$A \wedge B$	$\equiv$	$B \wedge A$	$A \vee B$	$\equiv$	$B \vee A$
$A \wedge (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \wedge C$	$A \vee (B \vee C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \vee C$
$A \wedge A$	$\equiv$	A	$A \vee A$	$\equiv$	A
$A \wedge (B \vee C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
$A \vee (A \wedge B)$	$\equiv$	A	$A \wedge (A \vee B)$	$\equiv$	A
$\neg(A \wedge B)$	$\equiv$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg(A \vee B)$	$\equiv$	$\neg A \wedge \neg B$
$\neg\neg A$	$\equiv$	A	$A \to B$	$\equiv$	$\neg A \vee B$

Основные равносильности

$A \wedge B$	$\equiv$	$B \wedge A$	$A \vee B$	$\equiv$	$B \vee A$
$A \wedge (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \wedge C$	$A \vee (B \vee C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \vee C$
$A \wedge A$	$\equiv$	A	$A \vee A$	$\equiv$	A
$A \wedge (B \vee C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
$A \vee (A \wedge B)$	$\equiv$	A	$A \wedge (A \vee B)$	$\equiv$	A
$\neg(A \wedge B)$	$\equiv$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg(A \vee B)$	$\equiv$	$\neg A \wedge \neg B$
$\neg\neg A$	$\equiv$	A	$A \to B$	$\equiv$	$\neg A \vee B$

Основные равносильности

$A \wedge B \equiv B \wedge A$	$A \vee B \equiv B \vee A$
$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$	$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$
$A \wedge A \equiv A$	$A \vee A \equiv A$
$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
$A \vee (A \wedge B) \equiv A$	$A \wedge (A \vee B) \equiv A$
$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$	$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
$\neg\neg A \equiv A$	$A \to B \equiv \neg A \vee B$

Основные равносильности

$A \wedge B$	$\equiv$	$B \wedge A$	$A \vee B$	$\equiv$	$B \vee A$
$A \wedge (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \wedge C$	$A \vee (B \vee C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \vee C$
$A \wedge A$	$\equiv$	A	$A \vee A$	$\equiv$	A
$A \wedge (B \vee C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
$A \vee (A \wedge B)$	$\equiv$	A	$A \wedge (A \vee B)$	$\equiv$	A
$\neg(A \wedge B)$	$\equiv$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg(A \vee B)$	$\equiv$	$\neg A \wedge \neg B$
$\neg\neg A$	$\equiv$	A	$A \rightarrow B$	$\equiv$	$\neg A \vee B$

Пример.

$P \to (Q \to R) \equiv (P \to Q) \to R$?

Ответ: Нет. Рассмотрим такую оценку f, что $f(P) = f(Q) = f(R) = Л$.

Пример.

$P \to (Q \to R) \equiv (P \wedge Q) \to R$?

$$P \to (Q \to R) \equiv \neg P \vee (Q \to R) \equiv \neg P \vee (\neg Q \vee R) \equiv (\neg P \vee \neg Q) \vee R \equiv \neg (P \wedge Q) \vee R \equiv (P \wedge Q) \to R.$$

Пример.

$P \to (Q \to R) \equiv (P \to Q) \to R$?

Ответ: Нет. Рассмотрим такую оценку f, что $f(P) = f(Q) = f(R) = Л$.

Пример.

$P \to (Q \to R) \equiv (P \wedge Q) \to R$?

$P \to (Q \to R) \equiv \neg P \vee (Q \to R) \equiv \neg P \vee (\neg Q \vee R) \equiv (\neg P \vee \neg Q) \vee R \equiv \neg(P \wedge Q) \vee R \equiv (P \wedge Q) \to R.$

Пример.

$P \to (Q \to R) \equiv (P \to Q) \to R$?

Ответ: Нет. Рассмотрим такую оценку f, что $f(P) = f(Q) = f(R) =$ Л.

Пример.

$P \to (Q \to R) \equiv (P \wedge Q) \to R$?

$P \to (Q \to R) \equiv \neg P \vee (Q \to R) \equiv \neg P \vee (\neg Q \vee R) \equiv (\neg P \vee \neg Q) \vee R \equiv \neg(P \wedge Q) \vee R \equiv (P \wedge Q) \to R.$

Пример.

$P \to (Q \to R) \equiv (P \to Q) \to R$?

Ответ: Нет. Рассмотрим такую оценку f, что $f(P) = f(Q) = f(R) = Л$.

Пример.

$P \to (Q \to R) \equiv (P \wedge Q) \to R$?

$P \to (Q \to R) \equiv \neg P \vee (Q \to R) \equiv \neg P \vee (\neg Q \vee R) \equiv (\neg P \vee \neg Q) \vee R \equiv \neg (P \wedge Q) \vee R \equiv (P \wedge Q) \to R.$

Операция подстановки

Опр.

Если C и D — формулы, а $P \in \mathrm{Var}$, то через $C[P/D]$ обозначим результат подстановки формулы D вместо всех вхождений P в C.

Пример.

Пусть $C = (P_1 \to P_2) \to P_2$ и $D = P_3 \to P_2$. Тогда

$$C[P_2/D] = (P_1 \to (P_3 \to P_2)) \to (P_3 \to P_2).$$

Формально, определяем $C[P/D]$ индукцией по построению формулы C:

$$P[P/D] \rightleftharpoons D,$$

$$Q[P/D] \rightleftharpoons Q, \text{ если } Q \in \mathrm{Var}, \ Q \neq P,$$

$$(\neg A)[P/D] \rightleftharpoons \neg(A[P/D]),$$

$$(A \wedge B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \wedge B[P/D]),$$

$$(A \vee B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \vee B[P/D]),$$

$$(A \to B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \to B[P/D]).$$

Формально, определяем $C[P/D]$ индукцией по построению формулы C:

$$P[P/D] \rightleftharpoons D,$$

$$Q[P/D] \rightleftharpoons Q, \text{ если } Q \in \mathrm{Var}, \ Q \neq P,$$

$$(\neg A)[P/D] \rightleftharpoons \neg(A[P/D]),$$

$$(A \wedge B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \wedge B[P/D]),$$

$$(A \vee B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \vee B[P/D]),$$

$$(A \to B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \to B[P/D]).$$

Формально, определяем $C[P/D]$ индукцией по построению формулы C:

$$P[P/D] \rightleftharpoons D,$$

$$Q[P/D] \rightleftharpoons Q, \text{ если } Q \in \mathrm{Var},\ Q \neq P,$$

$$(\neg A)[P/D] \rightleftharpoons \neg(A[P/D]),$$

$$(A \wedge B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \wedge B[P/D]),$$

$$(A \vee B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \vee B[P/D]),$$

$$(A \to B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \to B[P/D]).$$

Формально, определяем $C[P/D]$ индукцией по построению формулы C:

$$P[P/D] \rightleftharpoons D,$$

$$Q[P/D] \rightleftharpoons Q, \text{ если } Q \in \mathrm{Var}, \; Q \neq P,$$

$$(\neg A)[P/D] \rightleftharpoons \neg(A[P/D]),$$

$$(A \wedge B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \wedge B[P/D]),$$

$$(A \vee B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \vee B[P/D]),$$

$$(A \to B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \to B[P/D]).$$

Формально, определяем $C[P/D]$ индукцией по построению формулы C:

$$P[P/D] \rightleftharpoons D,$$

$$Q[P/D] \rightleftharpoons Q, \text{ если } Q \in \mathrm{Var},\ Q \neq P,$$

$$(\neg A)[P/D] \rightleftharpoons \neg(A[P/D]),$$

$$(A \wedge B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \wedge B[P/D]),$$

$$(A \vee B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \vee B[P/D]),$$

$$(A \to B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \to B[P/D]).$$

Формально, определяем $C[P/D]$ индукцией по построению формулы C:

$$P[P/D] \rightleftharpoons D,$$

$$Q[P/D] \rightleftharpoons Q, \text{ если } Q \in \mathrm{Var}, \ Q \neq P,$$

$$(\neg A)[P/D] \rightleftharpoons \neg(A[P/D]),$$

$$(A \wedge B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \wedge B[P/D]),$$

$$(A \vee B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \vee B[P/D]),$$

$$(A \to B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \to B[P/D]).$$

Формально, определяем $C[P/D]$ индукцией по построению формулы C:

$$P[P/D] \rightleftharpoons D,$$

$$Q[P/D] \rightleftharpoons Q, \text{ если } Q \in \mathrm{Var},\ \ Q \neq P,$$

$$(\neg A)[P/D] \rightleftharpoons \neg(A[P/D]),$$

$$(A \wedge B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \wedge B[P/D]),$$

$$(A \vee B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \vee B[P/D]),$$

$$(A \to B)[P/D] \rightleftharpoons (A[P/D] \to B[P/D]).$$

Теорема о подстановке

Теорема.

1. *Если A — тавтология, B — произвольная формула, а $P \in \mathrm{Var}$, то $A[P/B]$ — тавтология.*
2. *Если $A \equiv B$, то $A[P/C] \equiv B[P/C]$.*

Пример.

Для любой формулы B формула $B \vee \neg B$ является тавтологией. Например, формула $(P_3 \leftrightarrow P_1) \vee \neg(P_3 \leftrightarrow P_1)$ — тавтология.

Теорема о подстановке

Теорема.

1. *Если A — тавтология, B — произвольная формула, а $P \in \mathrm{Var}$, то $A[P/B]$ — тавтология.*
2. *Если $A \equiv B$, то $A[P/C] \equiv B[P/C]$.*

Пример.

Для любой формулы B формула $B \vee \neg B$ является тавтологией. Например, формула $(P_3 \leftrightarrow P_1) \vee \neg(P_3 \leftrightarrow P_1)$ — тавтология.

Теорема о подстановке

Теорема.

1. *Если A — тавтология, B — произвольная формула, а $P \in \mathrm{Var}$, то $A[P/B]$ — тавтология.*
2. *Если $A \equiv B$, то $A[P/C] \equiv B[P/C]$.*

Пример.

Для любой формулы B формула $B \vee \neg B$ является тавтологией. Например, формула $(P_3 \leftrightarrow P_1) \vee \neg(P_3 \leftrightarrow P_1)$ — тавтология.

Лемма.

1. Если $A \equiv B$, то $\neg A \equiv \neg B$.
2. Если $A_1 \equiv B_1$ и $A_2 \equiv B_2$, то

$$\begin{aligned} A_1 \wedge A_2 &\equiv B_1 \wedge B_2 \\ A_1 \vee A_2 &\equiv B_1 \vee B_2 \\ A_1 \to A_2 &\equiv B_1 \to B_2. \end{aligned}$$

Теорема. (о замене подформулы на эквивалентную)
Если $A \equiv B$, *то* $C[P/A] \equiv C[P/B]$.

Теорема доказывается индукцией по построению формулы C.

Пример.
Пусть $A = Q \vee Q$, $B = Q$, $C = P \wedge R$. Так как $Q \vee Q \equiv Q$, то $(Q \vee Q) \wedge R \equiv Q \wedge R$.

Теорема. (о замене подформулы на эквивалентную)

Если $A \equiv B$, то $C[P/A] \equiv C[P/B]$.

Теорема доказывается индукцией по построению формулы C.

Пример.

Пусть $A = Q \vee Q$, $B = Q$, $C = P \wedge R$. Так как $Q \vee Q \equiv Q$, то $(Q \vee Q) \wedge R \equiv Q \wedge R$.

Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы

Опр.

Литералами называются переменные и их отрицания.

Пример.

P_3, $\neg P_5$ — литералы;
$P_3 \vee P_1$ и $\neg\neg P_3$ — не литералы.

Опр.

Элементарной конъюнкцией называем формулу вида $\bigwedge_{i=1}^{n} L_i$, где L_i — литералы.

Пример.

$(P \wedge \neg Q) \wedge \neg P$ — элементарная конъюнкция;
$P \wedge (\neg Q \wedge \neg P)$ — не элементарная конъюнкция.

Опр.

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называем формулу вида $\bigvee_{j=1}^{m} C_j$, где C_j — элементарные конъюнкции.

Пример.

$(P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge R)$ и $(P \wedge Q \wedge R) \vee \neg P \vee \neg R$ — дизъюнктивные нормальные формы.

Аналогично определяются элементарные дизъюнкции и конъюнктивные нормальные формы (КНФ).

Опр.

Элементарной дизъюнкцией называем формулу вида $\bigvee_{i=1}^{n} L_i$, где L_i — литералы.

КНФ называем формулу вида $\bigwedge_{j=1}^{m} D_j$, где D_j — элементарные дизъюнкции.

Упражнение

Привести к КНФ формулу $(P \vee Q) \to R$. *Ответ:* $(\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$.

Аналогично определяются элементарные дизъюнкции и конъюнктивные нормальные формы (КНФ).

Опр.

Элементарной дизъюнкцией называем формулу вида $\bigvee_{i=1}^{n} L_i$, где L_i — литералы.

КНФ называем формулу вида $\bigwedge_{j=1}^{m} D_j$, где D_j — элементарные дизъюнкции.

Упражнение

Привести к КНФ формулу $(P \vee Q) \to R$. *Ответ:* $(\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$.

Теорема о ДНФ и КНФ

Теорема.

Каждая пропозициональная формула равносильна некоторой ДНФ и некоторой КНФ.

Доказательство.

(первый вариант) Достаточно заметить, что формула, построенная в доказательстве теоремы о функциональной полноте, является ДНФ.

Теорема о ДНФ и КНФ

Теорема.

Каждая пропозициональная формула равносильна некоторой ДНФ и некоторой КНФ.

Доказательство.

(первый вариант) Достаточно заметить, что формула, построенная в доказательстве теоремы о функциональной полноте, является ДНФ.

Доказательство.

(второй вариант)

Применяем основные эквивалентности.

1. Выразим $\rightarrow$ через $\neg$ и $\vee$;
2. Проносим все отрицания максимально вглубь формулы;
3. Удаляем многократные отрицания.
4. Выносим все дизъюнкции максимально наружу, пользуясь дистрибутивностью;
5. Пользуясь ассоциативностью $\wedge$ и $\vee$ расставляем правильно скобки.

Доказательство.

(второй вариант)

Применяем основные эквивалентности.

1. Выразим $\to$ через $\neg$ и $\vee$;
2. Проносим все отрицания максимально вглубь формулы;
3. Удаляем многократные отрицания.
4. Выносим все дизъюнкции максимально наружу, пользуясь дистрибутивностью;
5. Пользуясь ассоциативностью $\wedge$ и $\vee$ расставляем правильно скобки.

Доказательство.
(второй вариант)
Применяем основные эквивалентности.

1. Выразим $\to$ через $\neg$ и $\vee$;
2. Проносим все отрицания максимально вглубь формулы;
3. Удаляем многократные отрицания.
4. Выносим все дизъюнкции максимально наружу, пользуясь дистрибутивностью;
5. Пользуясь ассоциативностью $\wedge$ и $\vee$ расставляем правильно скобки.

Доказательство.

(второй вариант)

Применяем основные эквивалентности.

1. Выразим $\to$ через $\neg$ и $\vee$;
2. Проносим все отрицания максимально вглубь формулы;
3. Удаляем многократные отрицания.
4. Выносим все дизъюнкции максимально наружу, пользуясь дистрибутивностью;
5. Пользуясь ассоциативностью $\wedge$ и $\vee$ расставляем правильно скобки.

Доказательство.

(второй вариант)

Применяем основные эквивалентности.

1. Выразим $\to$ через $\neg$ и $\vee$;
2. Проносим все отрицания максимально вглубь формулы;
3. Удаляем многократные отрицания.
4. Выносим все дизъюнкции максимально наружу, пользуясь дистрибутивностью;
5. Пользуясь ассоциативностью $\wedge$ и $\vee$ расставляем правильно скобки.

Доказательство.
(второй вариант)
Применяем основные эквивалентности.

1. Выразим $\to$ через $\neg$ и $\vee$;
2. Проносим все отрицания максимально вглубь формулы;
3. Удаляем многократные отрицания.
4. Выносим все дизъюнкции максимально наружу, пользуясь дистрибутивностью;
5. Пользуясь ассоциативностью $\wedge$ и $\vee$ расставляем правильно скобки.

Замечание.

Если A — ДНФ, то $\neg A$ превращается в КНФ после переноса всех отрицаний вглубь и удаления двойных отрицаний.

Для того чтобы получить КНФ формулы A, достаточно применить этот алгоритм к ДНФ формулы $\neg A$.

Совершенные ДНФ и КНФ

Опр.

Формула A от переменных $P_1, \ldots, P_n$ называется *совершенной ДНФ*, если A — ДНФ и

- Каждая элем. конъюнкция имеет вид $A_{\vec{x}} \rightleftharpoons \bigwedge_{i=1}^{n} P_i^{x_i}$ для некоторого $\vec{x} \in \mathbb{B}^n$.
- $A = \bigvee_{j=1}^{m} A_{\vec{x}_j}$, где $\vec{x}_1, \ldots \vec{x}_m \in \mathbb{B}^n$ попарно различны и взяты в лексикографическом порядке.

Совершенные КНФ определяются двойственным образом.

Совершенные ДНФ и КНФ

Опр.

Формула A от переменных $P_1, \ldots, P_n$ называется *совершенной ДНФ*, если A — ДНФ и

- Каждая элем. конъюнкция имеет вид $A_{\vec{x}} \rightleftharpoons \bigwedge_{i=1}^{n} P_i^{x_i}$ для некоторого $\vec{x} \in \mathbb{B}^n$.
- $A = \bigvee_{j=1}^{m} A_{\vec{x}_j}$, где $\vec{x}_1, \ldots \vec{x}_m \in \mathbb{B}^n$ попарно различны и взяты в лексикографическом порядке.

Совершенные КНФ определяются двойственным образом.

Замечание.

Удобно расширить множество формул константами $\perp$ (ложь) и $\top$ (истина), и считать $\perp$ совершенной ДНФ, а $\top$ – совершенной КНФ.

Для любой оценки f считаем $f(\top) = И$ и $f(\perp) = Л$. Имеем эквивалентности:

$$\boxed{\perp \equiv A \wedge \neg A; \quad \top \equiv A \vee \neg A.}$$

Как следствие можем вывести:

$\perp \wedge A \equiv \perp$, $\perp \vee A \equiv A$, $\top \vee A \equiv \top$, $\top \wedge A \equiv A$.

Замечание.
Удобно расширить множество формул константами $\perp$ (ложь) и $\top$ (истина), и считать $\perp$ совершенной ДНФ, а $\top$ – совершенной КНФ.

Для любой оценки f считаем $f(\top) = И$ и $f(\perp) = Л$. Имеем эквивалентности:

$$\boxed{\perp \equiv A \wedge \neg A; \quad \top \equiv A \vee \neg A.}$$

Как следствие можем вывести:
$\perp \wedge A \equiv \perp$, $\perp \vee A \equiv A$, $\top \vee A \equiv \top$, $\top \wedge A \equiv A$.

Замечание.

Удобно расширить множество формул константами $\bot$ (ложь) и $\top$ (истина), и считать $\bot$ совершенной ДНФ, а $\top$ – совершенной КНФ.

Для любой оценки f считаем $f(\top) = \text{И}$ и $f(\bot) = \text{Л}$. Имеем эквивалентности:

$$\boxed{\bot \equiv A \wedge \neg A; \quad \top \equiv A \vee \neg A.}$$

Как следствие можем вывести:
$\bot \wedge A \equiv \bot$, $\bot \vee A \equiv A$, $\top \vee A \equiv \top$, $\top \wedge A \equiv A$.

Теорема.

Всякая формула A от переменных $\{P_1, \dots, P_n\}$ равносильна некоторой совершенной ДНФ.

Доказательство.

Воспользуемся равносильностями:

1. $A \wedge \neg A \equiv \bot, \quad \bot \wedge A \equiv \bot, \quad \bot \vee A \equiv A$ (удаляем противоречивые конъюнкции)
2. $A \wedge A \equiv A$ (удаляем повторы литералов)
3. $A \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$ (добавляем недостающие переменные)

Теорема.

Всякая формула A от переменных $\{P_1, \ldots, P_n\}$ равносильна некоторой совершенной ДНФ.

Доказательство.

Воспользуемся равносильностями:

1. $A \wedge \neg A \equiv \bot, \quad \bot \wedge A \equiv \bot, \quad \bot \vee A \equiv A$ (удаляем противоречивые конъюнкции)
2. $A \wedge A \equiv A$ (удаляем повторы литералов)
3. $A \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$ (добавляем недостающие переменные)

Замечание.

Если данный набор переменных пуст, то формально необходимо также считать $\top$ совершенной ДНФ, а $\bot$ – совершенной КНФ.

Если A не содержит переменных, то $A \equiv \top$, если $f(A) = И$, и $A \equiv \bot$, если $f(A) = Л$.

Теорема.

Совершенные ДНФ эквивалентных формул (относительно одного набора переменных) графически совпадают.

Доказательство.

Для совершенной ДНФ каждая элем. конъюнкция определяет выполняющую оценку, а сама ДНФ — все такие оценки.

Следствие.

Совершенная ДНФ любой формулы A единственна.