Введение в математическую логику

Лев Дмитриевич Беклемишев
http://lpcs.math.msu.su/vml2010

Мех-мат МГУ, 1-й курс, весна 2010 г.

11.02.2010

Консультации

У каждой группы один раз в две недели.

Группы	Нед.	Д.	Время	Ауд.	Преп.	Начало
101, 106	2-я н.	ср.	10:50–12:25	14-04	Яворская	17.02.10
102, 103	2-я н.	вт.	16:45–18:20	465(2гум)	Бабенко	16.02.10
104, 105	1-я в.	вт.	16:45–18:20	465(2гум)	Бабенко	09.02.10
107, 112	2-я н.	сб.	15:00–16:35	13-02	Крупский	20.02.10
108, 109	2-я н.	вт.	16:45–18:20	467(2гум)	Плиско	16.02.10
110, 111	1-я в.	вт.	16:45–18:20	467(2гум)	Плиско	09.02.10

Объявление

Просеминар по математической логике и информатике

http://proseminar.math.ru/

Пятница, 16:45–18:20, ауд. 16–22
Начало 19 февраля.

Математическая логика $\Longrightarrow$

- Математика
- Информатика (CS)
- Искусственный интеллект (AI)
- Лингвистика
- Философия
- Юриспруденция

Применения в математике

- *Результаты о независимости* (невозможности доказать то или иное утверждение).

  Континуум-гипотеза:
  Paul Cohen (1961), 1-я проблема Гильберта

  Непротиворечивость арифметики:
  Kurt Gödel (1931), 2-я проблема Гильберта

  Многочисленные результаты в теории множеств, топологии, теории меры, комбинаторике

- *Результаты о невычислимости* (невозможности алгоритмического решения той или иной проблемы).

  Вопрос о существовании решений данного уравнения в целых числах

  Ю.В. Матиясевич (1971), 10-я проблема Гильберта

Вопрос о равенстве элементов в группе, заданной образующими и соотношениями
П.С. Новиков (1955)

Вопрос о распознавании свойств группы, заданной образующими и соотношениями
С.И. Адян (1956)

Вопрос об гомеоморфизме двух заданных 4-мерных многообразий
Ан.А. Марков (1958)

- Универсальная алгебра и теория моделей. Переосмысление с более общих позиций ряда результатов в алгебре и геометрии. (А.И. Мальцев, A. Tarski)
- Нестандартный анализ. Строгое обоснование метода бесконечно малых. (A. Robinson)
- Proof-mining. Извлечение информации из неконструктивных математических доказательств: новые результаты в анализе, теории чисел, эргодической теории. (G. Kreisel, H. Luckhardt, U. Kohlenbach)

Логика в информатике (Computer Science)

- Общее понятие алгоритма (A. Church, A. Turing, E. Post).
- Теория сложности вычислений
- Теория автоматов
- Теория баз данных
- Семантика языков программирования

- Доказательства корректности программ
- Распределённые вычисления
- Логическое программирование
- Интерактивное доказательство теорем
- и т.д.

Логика в лингвистике

- Формальные грамматики
- Синтаксический анализ текста
- Семантика

Логика в AI

- Нечёткая логика
- Логики знаний
- и.т.д.

Ядро математической логики

Математические модели следующих явлений:

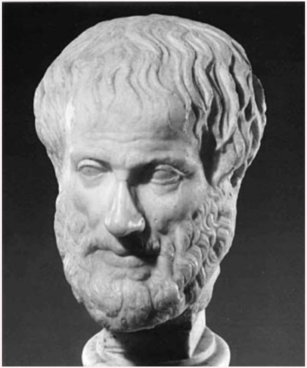
- Алгоритм, *вычислимость*
- Математическое утверждение, *истинность*
- Математическое доказательство, *доказуемость*

Основные направления

- *Теория алгоритмов*
- *Теория моделей*
- *Теория доказательств*

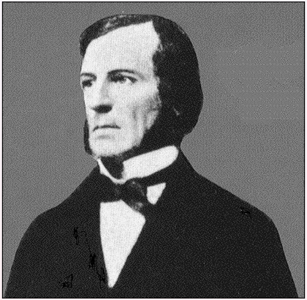
(Деление условное.)

История в лицах

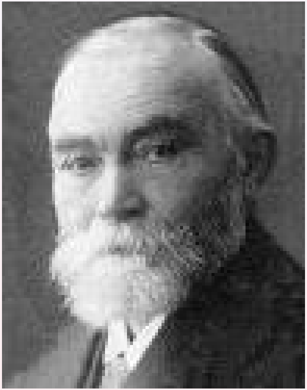


Аристотель:
силлогистика; логика как учение о правильных рассуждениях

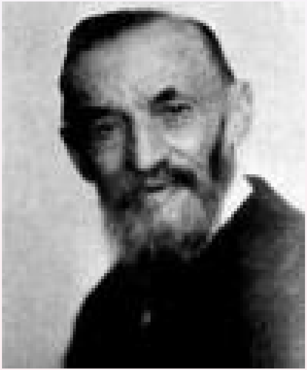
G.W. Leibnitz:
идея формализации языка математики и универсального решателя задач

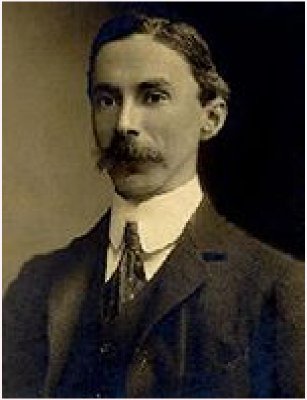
G. Boole (1847), A. de Morgan (1858):
алгебра логики



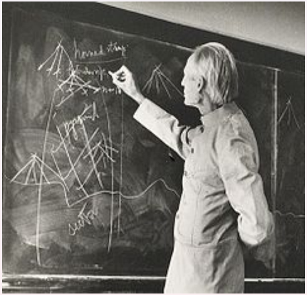
G. Frege (1879):
кванторы, логика предикатов, формальное исчисление, неудавшаяся попытка формализовать математику



G. Peano (1891):
формализация арифметики



B. Russell, A. Whitehead (1910):
первая аксиоматика всей математики; попытка свести математику к логике (логицизм)



L.E.J. Brouwer (1913): интуционизм, критика закона исключённого третьего

D. Hilbert: аксиоматический метод; аксиоматика элементарной геометрии; программа обоснования математики средствами теории доказательств

K. Gödel (1931):
теоремы о неполноте
(и многое другое)

План курса

1. Логика высказываний
2. Логика предикатов
3. Алгоритмы и вычислимые функции
4. Разрешимые и неразрешимые теории

Синтаксис логики высказываний

- Переменные: $\mathrm{Var} = \{P_0, P_1, \dots\}$.
- Связки: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$.
- Формулы Fm строятся по правилам:
  1. Если $P \in \mathrm{Var}$, то P — формула.
  2. Если A и B — формулы, то $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ — формулы.

Синтаксис логики высказываний

- Переменные: $\mathrm{Var} = \{P_0, P_1, \dots\}$.
- Связки: $\neg, \wedge, \vee, \to$.
- Формулы Fm строятся по правилам:

1. Если $P \in \mathrm{Var}$, то P — формула.
2. Если A и B — формулы, то $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$ — формулы.

Синтаксис логики высказываний

- Переменные: $\mathrm{Var} = \{P_0, P_1, \dots\}$.
- Связки: $\neg, \wedge, \vee, \to$.
- Формулы Fm строятся по правилам:
  1. Если $P \in \mathrm{Var}$, то P — формула.
  2. Если A и B — формулы, то $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$ — формулы.

Семантика логики высказываний

Опр.

Истинностные значения: $\mathbb{B} \rightleftharpoons \{\text{Л}, \text{И}\} \rightleftharpoons \{0, 1\}$.

Булевы функции: функции $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$.

Таблицы истинности

Функции $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ принято задавать *таблицами истинности* вида

x_1	x_2	$\dots$	x_n	$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
0	0	$\dots$	0	$f(0, 0, \dots, 0)$
0	0	$\dots$	1	$f(0, 0, \dots, 1)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
1	1	$\dots$	1	$f(1, 1, \dots, 1)$

В такой таблице 2^n строк.

Оценка и значение формулы

Опр.

Оценка переменных: функция $f : \mathrm{Var} \to \mathbb{B}$.

Любая оценка продолжается естественным образом до отображения $f : \mathsf{Fm} \to \mathbb{B}$.

Опр.

$f(A)$ = *значение* формулы A при оценке f.

Определяется индукцией по построению A:

Значение $f(A)$ определяется индукцией по построению A:

$$\begin{aligned}
f(\neg A) = \text{И} \quad &\Longleftrightarrow \quad f(A) = \text{Л};\\
f(A \wedge B) = \text{И} \quad &\Longleftrightarrow \quad f(A) = \text{И} \text{ и } f(B) = \text{И};\\
f(A \vee B) = \text{И} \quad &\Longleftrightarrow \quad f(A) = \text{И} \text{ или } f(B) = \text{И};\\
f(A \to B) = \text{И} \quad &\Longleftrightarrow \quad f(A) = \text{Л} \text{ или } f(B) = \text{И}.
\end{aligned}$$

Утверждение.

Пусть $\mathrm{Var} = \{P_1, \ldots, P_n\}$.
Тогда существует взаимно-однозначное соответствие между оценками $f : \mathrm{Var} \to \mathbb{B}$ и наборами $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{B}^n$.

$$f \longmapsto (f(P_1), \ldots, f(P_n)) \in \mathbb{B}^n$$

$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto f_{\vec{x}}$,
где оценка $f_{\vec{x}}$ определена таблицей

P_1	P_2	$\ldots$	P_n
x_1	x_2	$\ldots$	x_n

$$f \longmapsto (f(P_1), \dots, f(P_n)) \in \mathbb{B}^n$$

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto f_{\vec{x}},$$

где оценка $f_{\vec{x}}$ определена таблицей

P_1	P_2	$\dots$	P_n
x_1	x_2	$\dots$	x_n

$$f \longmapsto (f(P_1), \ldots, f(P_n)) \in \mathbb{B}^n$$

$$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto f_{\vec{x}},$$

где оценка $f_{\vec{x}}$ определена таблицей

P_1	P_2	$\ldots$	P_n
x_1	x_2	$\ldots$	x_n

Таблицы истинности формул

Опр.

Таблица истинности формулы A от n переменных есть булева функция $\varphi_A : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ такая, что

$$\varphi_A(\vec{x}) = f_{\vec{x}}(A),$$

для всех $\vec{x} \in \mathbb{B}^n$.

Функциональная полнота

Теорема.

Для любой функции $\varphi : \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{B}$ *найдётся такая формула* A *от* n *переменных, что* $\varphi = \varphi_A$. *При этом можно считать, что* A *содержит лишь связки* $\neg$ *и* $\vee$.

Доказательство.

Для $x \in \mathbb{B}$ положим

$$P^x = \begin{cases} P, & \text{если } x = \text{И};\\ \neg P, & \text{если } x = \text{Л}. \end{cases}$$

Для $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{B}^n$ обозначим

$$A_{\vec{x}} \rightleftharpoons \bigwedge_{i=1}^{n} P_i^{x_i},$$

где $\bigwedge_{j=1}^{m} B_j \rightleftharpoons ((B_1 \wedge B_2) \wedge \cdots \wedge B_m)$.

Доказательство.

Для $x \in \mathbb{B}$ положим

$$P^x = \begin{cases} P, & \text{если } x = \text{И};\\ \neg P, & \text{если } x = \text{Л}. \end{cases}$$

Для $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{B}^n$ обозначим

$$A_{\vec{x}} \rightleftharpoons \bigwedge_{i=1}^{n} P_i^{x_i},$$

где $\bigwedge_{j=1}^{m} B_j \rightleftharpoons ((B_1 \wedge B_2) \wedge \cdots \wedge B_m)$.

Доказательство.

Для $x \in \mathbb{B}$ положим

$$P^x = \begin{cases} P, & \text{если } x = \text{И}; \\ \neg P, & \text{если } x = \text{Л}. \end{cases}$$

Для $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{B}^n$ обозначим

$$A_{\vec{x}} \rightleftharpoons \bigwedge_{i=1}^{n} P_i^{x_i},$$

где $\bigwedge_{j=1}^{m} B_j \rightleftharpoons ((B_1 \wedge B_2) \wedge \cdots \wedge B_m)$.

Имеем: для любой оценки f

$$f(A_{\vec{x}}) = И \iff f = f_{\vec{x}}. \tag{1}$$

Пусть список $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m$ исчерпывает все $\vec{x} \in \mathbb{B}^n$ для которых $\varphi(\vec{x}) = И$, то есть

$$\varphi(\vec{x}) = И \iff \exists j \; \vec{x} = \vec{x}_j. \tag{2}$$

Положим

$$A \rightleftharpoons \bigvee_{j=1}^{m} A_{\vec{x}_j}.$$

Имеем: для любой оценки f

$$f(A_{\vec{x}}) = \text{И} \iff f = f_{\vec{x}}. \tag{1}$$

Пусть список $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m$ исчерпывает все $\vec{x} \in \mathbb{B}^n$ для которых $\varphi(\vec{x}) = \text{И}$, то есть

$$\varphi(\vec{x}) = \text{И} \iff \exists j\ \vec{x} = \vec{x}_j. \tag{2}$$

Положим

$$A \rightleftharpoons \bigvee_{j=1}^{m} A_{\vec{x}_j}.$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
f_{\vec{x}}(A) = И \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists j \; f_{\vec{x}}(A_{\vec{x}_j}) = И \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists j \; \vec{x} = \vec{x}_j \quad \text{по } (1) \\
&\Longleftrightarrow \quad \varphi(\vec{x}) = И \quad \text{по } (2).
\end{aligned}
$$

Значит, $\varphi_A(\vec{x}) = f_{\vec{x}}(A) = \varphi(\vec{x})$. $\boxtimes$

Тогда

$$\begin{aligned} f_{\vec{x}}(A) = И \quad & \Longleftrightarrow \quad \exists j \ f_{\vec{x}}(A_{\vec{x}_j}) = И \\ & \Longleftrightarrow \quad \exists j \ \vec{x} = \vec{x}_j \quad \text{по } (1) \\ & \Longleftrightarrow \quad \varphi(\vec{x}) = И \quad \text{по } (2). \end{aligned}$$

Значит, $\varphi_A(\vec{x}) = f_{\vec{x}}(A) = \varphi(\vec{x})$. $\boxtimes$

Тогда

$$\begin{aligned} f_{\vec{x}}(A) = И \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists j \ f_{\vec{x}}(A_{\vec{x}_j}) = И \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists j \ \vec{x} = \vec{x}_j \quad \text{по } (1) \\ &\Longleftrightarrow \quad \varphi(\vec{x}) = И \quad \text{по } (2). \end{aligned}$$

Значит, $\varphi_A(\vec{x}) = f_{\vec{x}}(A) = \varphi(\vec{x})$. ⊠

Тогда

$$\begin{aligned} f_{\vec{x}}(A) = \text{И} \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists j \; f_{\vec{x}}(A_{\vec{x}_j}) = \text{И} \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists j \; \vec{x} = \vec{x}_j \quad \text{по (1)} \\ &\Longleftrightarrow \quad \varphi(\vec{x}) = \text{И} \quad \text{по (2)}. \end{aligned}$$

Значит, $\varphi_A(\vec{x}) = f_{\vec{x}}(A) = \varphi(\vec{x})$. $\boxtimes$