

Логика предикатов
лекция 7

Лев Дмитриевич Беклемишев
<http://lpcs.math.msu.su/vml2009>

lbek1@yandex.ru

26.03.2009

Подстановка в логике предикатов

- Подстановка $C[P/A]$ разрешена, если P не находится в C в области действия квантора по переменной, входящей в A .
- (Замена подформулы на эквивалентную.)
Если $A \equiv B$ и разрешена подстановка формул A, B вместо P в C , то $C[P/A] \equiv C[P/B]$.

Подстановка в логике предикатов

- Подстановка $C[P/A]$ разрешена, если P не находится в C в области действия квантора по переменной, входящей в A .
- (Замена подформулы на эквивалентную.)
Если $A \equiv B$ и разрешена подстановка формул A, B вместо P в C , то $C[P/A] \equiv C[P/B]$.

- (Замена связанной переменной) Пусть $y \in \text{BdVar}$ не входит в формулу B . Тогда $B[x/y]$ есть формула и $B[x/y] \equiv B$.
- (Теорема о подстановке) Пусть формула A общезначима и разрешена подстановка формулы C вместо P в A , тогда общезначима формула $A[P/C]$.

- (Замена связанной переменной) Пусть $y \in \text{BdVar}$ не входит в формулу B . Тогда $B[x/y]$ есть формула и $B[x/y] \equiv B$.
- (Теорема о подстановке) Пусть формула A общезначима и разрешена подстановка формулы C вместо P в A , тогда общезначима формула $A[P/C]$.

Предварённая нормальная форма

Опр.

Формула A называется *предварённой*, если A имеет вид $Qx_1Qx_2 \dots Qx_nA_0[b_1/x_1, \dots, b_n/x_n]$, где Q означает квантор \forall или \exists , а формула A_0 бескванторная.

Теорема.

Для каждой формулы A можно указать эквивалентную ей предварённую формулу A' от тех же свободных переменных.

Предварённая нормальная форма

Опр.

Формула A называется *предварённой*, если A имеет вид $Qx_1Qx_2 \dots Qx_nA_0[b_1/x_1, \dots, b_n/x_n]$, где Q означает квантор \forall или \exists , а формула A_0 бескванторная.

Теорема.

Для каждой формулы A можно указать эквивалентную ей предварённую формулу A' от тех же свободных переменных.

Доказательство.

Применяя основные эквивалентности с кванторами постепенно выносим все кванторы наружу. Переименовываем связанные переменные там, где это необходимо.

$$(\forall x A[a/x] \vee B) \equiv \forall x (A[a/x] \vee B)$$

$$(\exists x A[a/x] \vee B) \equiv \exists x (A[a/x] \vee B)$$

$$(\forall x A[a/x] \wedge B) \equiv \forall x (A[a/x] \wedge B)$$

$$(\exists x A[a/x] \wedge B) \equiv \exists x (A[a/x] \wedge B)$$

$$\neg \forall x A[a/x] \equiv \exists x \neg A[a/x]$$

$$\neg \exists x A[a/x] \equiv \forall x \neg A[a/x]$$

Доказательство.

Применяя основные эквивалентности с кванторами постепенно выносим все кванторы наружу. Переименовываем связанные переменные там, где это необходимо.

$$\begin{aligned}(\forall x A[a/x] \vee B) &\equiv \forall x (A[a/x] \vee B) \\(\exists x A[a/x] \vee B) &\equiv \exists x (A[a/x] \vee B) \\(\forall x A[a/x] \wedge B) &\equiv \forall x (A[a/x] \wedge B) \\(\exists x A[a/x] \wedge B) &\equiv \exists x (A[a/x] \wedge B) \\ \neg \forall x A[a/x] &\equiv \exists x \neg A[a/x] \\ \neg \exists x A[a/x] &\equiv \forall x \neg A[a/x]\end{aligned}$$

Пример.

$$\begin{aligned}\forall x P(x) \wedge \neg \forall x Q(x, a) &\equiv \\ \forall x P(x) \wedge \exists x \neg Q(x, a) &\equiv \\ \forall x P(x) \wedge \exists y \neg Q(y, a) &\equiv \\ \forall x (P(x) \wedge \exists y \neg Q(y, a)) &\equiv \\ \forall x \exists y (P(x) \wedge \neg Q(y, a)). &\end{aligned}$$

Замечание.

Кванторы могут быть вынесены наружу в различном порядке, поэтому предварённая форма данной формулы не единственна.

Пример.

$$\begin{aligned}\forall x P(x) \wedge \neg \forall x Q(x, a) & \equiv \\ \forall x P(x) \wedge \exists x \neg Q(x, a) & \equiv \\ \forall x P(x) \wedge \exists y \neg Q(y, a) & \equiv \\ \forall x (P(x) \wedge \exists y \neg Q(y, a)) & \equiv \\ \forall x \exists y (P(x) \wedge \neg Q(y, a)). & \end{aligned}$$

Замечание.

Кванторы могут быть вынесены наружу в различном порядке, поэтому предварённая форма данной формулы не единственна.

Пример.

$$\begin{aligned}\forall x P(x) \wedge \neg \forall x Q(x, a) & \equiv \\ \forall x P(x) \wedge \exists x \neg Q(x, a) & \equiv \\ \forall x P(x) \wedge \exists y \neg Q(y, a) & \equiv \\ \forall x (P(x) \wedge \exists y \neg Q(y, a)) & \equiv \\ \forall x \exists y (P(x) \wedge \neg Q(y, a)). & \end{aligned}$$

Замечание.

Кванторы могут быть вынесены наружу в различном порядке, поэтому предварённая форма данной формулы не единственна.

Пример.

$$\begin{aligned}\forall x P(x) \wedge \neg \forall x Q(x, a) &\equiv \\ \forall x P(x) \wedge \exists x \neg Q(x, a) &\equiv \\ \forall x P(x) \wedge \exists y \neg Q(y, a) &\equiv \\ \forall x (P(x) \wedge \exists y \neg Q(y, a)) &\equiv \\ \forall x \exists y (P(x) \wedge \neg Q(y, a)). &\end{aligned}$$

Замечание.

Кванторы могут быть вынесены наружу в различном порядке, поэтому предварённая форма данной формулы не единственна.

Пример.

$$\begin{aligned}\forall x P(x) \wedge \neg \forall x Q(x, a) & \equiv \\ \forall x P(x) \wedge \exists x \neg Q(x, a) & \equiv \\ \forall x P(x) \wedge \exists y \neg Q(y, a) & \equiv \\ \forall x (P(x) \wedge \exists y \neg Q(y, a)) & \equiv \\ \forall x \exists y (P(x) \wedge \neg Q(y, a)). & \end{aligned}$$

Замечание.

Кванторы могут быть вынесены наружу в различном порядке, поэтому предварённая форма данной формулы не единственна.

Пример.

$$\begin{aligned}\forall x P(x) \wedge \neg \forall x Q(x, a) &\equiv \\ \forall x P(x) \wedge \exists x \neg Q(x, a) &\equiv \\ \forall x P(x) \wedge \exists y \neg Q(y, a) &\equiv \\ \forall x (P(x) \wedge \exists y \neg Q(y, a)) &\equiv \\ \forall x \exists y (P(x) \wedge \neg Q(y, a)). &\end{aligned}$$

Замечание.

Кванторы могут быть вынесены наружу в различном порядке, поэтому предварённая форма данной формулы не единственна.

Теории

Опр.

Теорией сигнатуры Σ называем произвольное множество T замкнутых формул языка \mathcal{L}_Σ .
Элементы $A \in T$ называем *нелогическими аксиомами* T .

Пример.

Теория отношения эквивалентности:

- $\forall x R(x, x)$;
- $\forall x, y (R(x, y) \rightarrow R(y, x))$;
- $\forall x, y, z (R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z))$.

Теории

Опр.

Теорией сигнатуры Σ называем произвольное множество T замкнутых формул языка \mathcal{L}_Σ .
Элементы $A \in T$ называем *нелогическими аксиомами* T .

Пример.

Теория отношения эквивалентности:

- $\forall x R(x, x)$;
- $\forall x, y (R(x, y) \rightarrow R(y, x))$;
- $\forall x, y, z (R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z))$.

Модель теории

Опр.

Модель $(M; \Sigma)$ есть *модель теории T* (обозначение $M \models T$), если для любой $A \in T$ $M \models A$.

Пример.

R есть отношение эквивалентности на множестве M , если и только если $(M; R) \models T$, где T — теория отношения эквивалентности.

Модель теории

Опр.

Модель $(M; \Sigma)$ есть *модель теории* T (обозначение $M \models T$), если для любой $A \in T$ $M \models A$.

Пример.

R есть отношение эквивалентности на множестве M , если и только если $(M; R) \models T$, где T — теория отношения эквивалентности.

Пример.

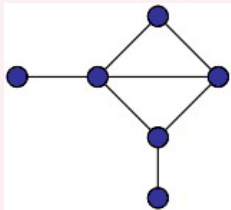
Модель $(M; <)$ есть *строгий частичный порядок*, если в $(M; <)$ истинны следующие предложения:

- 1 $\forall x, y, z (x < y \wedge y < z \rightarrow x < z)$
- 2 $\forall x \neg x < x$

Пример.

Простой граф — это модель вида $(V; E)$, где E — бинарный предикат смежности, причём отношение E симметрично и иррефлексивно:

- $\forall x \neg E(x, x)$
- $\forall x, y (E(x, y) \rightarrow E(y, x))$



Пример.

$(M; =, \cdot, 1)$ есть *группа*, если M есть модель следующей теории (при условии, что « $=$ » в M понимается как равенство):

- 1 $\forall x, y, z \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
- 2 $\forall x \quad (1 \cdot x = x \wedge x \cdot 1 = x)$
- 3 $\forall x \exists y \quad (x \cdot y = 1 \wedge y \cdot x = 1)$

Равенство

Пусть Σ — сигнатура, содержащая выделенный предикатный символ $=$.

Опр.

Нормальной моделью называем модель $(M; \Sigma)$, в которой $=$ интерпретируется как равенство $\{\langle x, x \rangle \mid x \in M\}$.

Опр.

Аксиомы равенства для Σ — универсальные замыкания следующих формул:

① аксиомы отношения эквивалентности для $=$

② $a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \wedge \dots \wedge a_n = b_n \rightarrow$
 $(P(a_1, \dots, a_n) \leftrightarrow P(b_1, \dots, b_n))$

③ $a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \wedge \dots \wedge a_n = b_n \rightarrow$
 $(f(a_1, \dots, a_n) = f(b_1, \dots, b_n))$

для всех $f \in \text{Func}_\Sigma$ and $P \in \text{Pred}_\Sigma$.

Предложение.

Если $(M; \Sigma)$ — нормальная модель, то в M истинны все аксиомы равенства.

Опр.

Теорией с равенством называем теорию сигнатуры Σ с равенством, содержащую все аксиомы равенства.

Предложение.

Если $(M; \Sigma)$ — нормальная модель, то в M истинны все аксиомы равенства.

Опр.

Теорией с равенством называем теорию сигнатуры Σ с равенством, содержащую все аксиомы равенства.

Теорема.

Пусть T — теория с равенством. Если T выполнима, то T имеет нормальную модель.

Доказательство.

Пусть $M \models T$. Предикат $=_M$ есть отношение эквивалентности на M . Положим $M' \doteq M / =_M$ — множество классов эквивалентности и $\varphi : M \rightarrow M'$ сопоставляет любому $x \in M$ его класс $\varphi(x) \in M'$.

Теорема.

Пусть T — теория с равенством. Если T выполнима, то T имеет нормальную модель.

Доказательство.

Пусть $M \models T$. Предикат $=_M$ есть отношение эквивалентности на M . Положим $M' \rightleftharpoons M / \equiv_M$ — множество классов эквивалентности и $\varphi : M \rightarrow M'$ сопоставляет любому $x \in M$ его класс $\varphi(x) \in M'$.

В силу аксиом равенства в M , все функции и предикаты корректно определены на M' и M' — нормальная модель.

Индукцией по построению формулы A проверяем

$$M \models A[x_1, \dots, x_n] \iff M' \models A[\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)].$$

Отсюда следует $M' \models T$.

Упражнения

Упражнение

Выпишите аксиомы теории коммутативных колец с единицей в сигнатуре $=, +, -, \cdot, 0, 1$.

Упражнение

Выпишите аксиомы теории полей в той же сигнатуре.

Элементарная геометрия

Аксиоматика Тарского:

$$G1. \quad ab \cong ba$$

$$G2. \quad ab \cong pq \wedge ab \cong rs \rightarrow pq \cong rs$$

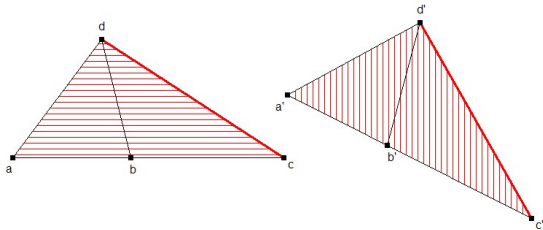
$$G3. \quad ab \cong cc \rightarrow a = b$$

$$G4. \quad Babd \wedge Bbcd \rightarrow Babc$$

$$G5. \quad \exists x(Bqax \wedge ax \cong bc)$$

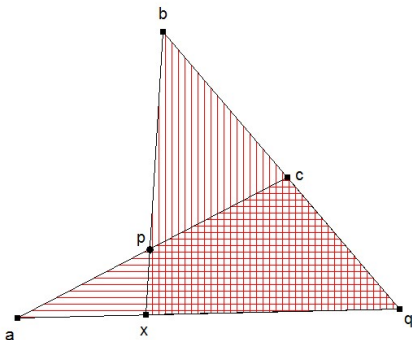
G6. (пять отрезков)

$$(a \neq b \wedge Babc \wedge Ba'b'c' \wedge ab \cong a'b' \wedge bc \cong b'c' \\ \wedge ad \cong a'd' \wedge bd \cong b'd') \rightarrow cd \cong c'd'$$



G7. (аксиома Паша)

$$Baqc \wedge Bqcb \rightarrow \exists x (Baxq \wedge Bbpx)$$



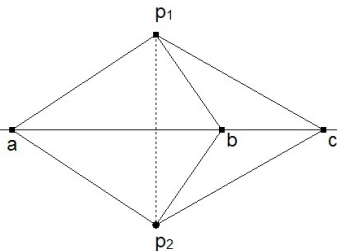
Аксиомы размерности

G8. $\exists x, y, z (\neg Bxyz \wedge \neg Byzx \wedge \neg Bzxy)$

G9. ($\dim \leq 2$)

$(p_1 \neq p_2 \wedge ap_1 \cong ap_2 \wedge bp_1 \cong bp_2 \wedge cp_1 \cong cp_2)$

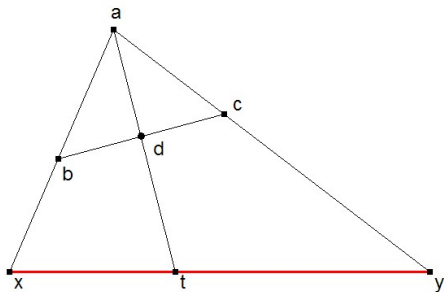
$\rightarrow a \in bc$



G10. (аксиома Евклида)

$Badt \wedge Bbdc \wedge a \neq d \rightarrow$

$\exists x, y (Babx \wedge Bacu \wedge Bytx)$



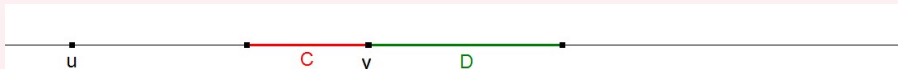
$G11$. (схема аксиом непрерывности)

$$\exists u \forall x, y (C[a/x] \wedge D[a/y] \rightarrow Buxy) \rightarrow \\ \exists v \forall x, y (C[a/x] \wedge D[a/y] \rightarrow Bxvy)$$

Здесь x, y, u, v не входят в C, D .

$G11'$. (аксиома непрерывности 2-го порядка)

$$\forall X, Y (\exists u \forall x, y (x \in X \wedge y \in Y \rightarrow Buxy) \rightarrow \\ \exists v \forall x, y (x \in X \wedge y \in Y \rightarrow Bxvy))$$



Теорема Тарского о полноте

Теорема.

Для любого предложения A языка элементарной геометрии, если $(\mathbb{R}^2; =, V, \cong) \models A$, то A логически следует из аксиом $G1 - G11$.

Теорема.

Существует алгоритм проверки формулы A на выполнимость в \mathbb{R}^2 .

Исчисление предикатов

Исчисление предикатов сигнатуры Σ задаётся след. аксиомами и правилами вывода.

Аксиомы:

A1. аксиомы исчисления высказываний,

A2. $\forall xA[a/x] \rightarrow A[a/t]$,

A3. $A[a/t] \rightarrow \exists xA[a/x]$.

Здесь A — любая формула сигнатуры Σ и t — любой терм (x не входит в A).

Правила вывода:

$$R1. \frac{A \quad A \rightarrow B}{B} \text{ (modus ponens)}$$

$$R2. \frac{A \rightarrow B}{A \rightarrow \forall x B[a/x]}$$

$$R3. \frac{B \rightarrow A}{\exists x B[a/x] \rightarrow A}$$

Здесь a не входит в A (и x не входит в B).

Правила R2 и R3 называются *правилами Бернайса*.

Выводимость

Опр.

Выводом в исчислении предикатов называется конечная последовательность формул, каждая из которых либо является аксиомой, либо получается из предыдущих формул по одному из правил вывода *R1 – R3*.

Пример.

$$\forall x A[a/x] \rightarrow A \quad (A2)$$

$$\forall x A[a/x] \rightarrow \forall y A[a/y] \quad (R2)$$

Выводимость

Опр.

Выводом в исчислении предикатов называется конечная последовательность формул, каждая из которых либо является аксиомой, либо получается из предыдущих формул по одному из правил вывода $R1 - R3$.

Пример.

$$\forall x A[a/x] \rightarrow A \quad (A2)$$

$$\forall x A[a/x] \rightarrow \forall y A[a/y] \quad (R2)$$

Опр.

Формула A называется *выводимой* в исчислении предикатов или *теоремой* исчисления предикатов (обозначение $\vdash A$), если существует вывод, в котором последняя формула есть A .

Пример.

$\vdash \forall x A[a/x] \rightarrow \forall y A[a/y]$ для любой формулы A .

Выводы в теории

Опр.

Выводом в теории T называется конечная последовательность формул, каждая из которых либо принадлежит множеству T , либо является логической аксиомой вида $A1 - A3$, либо получается из предыдущих формул по одному из правил вывода $R1 - R3$.

Доказуемость, опровержимость

Опр.

Формула A называется *выводимой (доказуемой) в теории T* или *теоремой T* (обозначение $T \vdash A$), если существует вывод в T , в котором последняя формула есть A .

Опр.

Формула A *опровержима* в T , если $T \vdash \neg A$.

Опр.

Формула A *независима* от T , если $T \not\vdash A$ и $T \not\vdash \neg A$.

Доказуемость, опровержимость

Опр.

Формула A называется *выводимой (доказуемой) в теории T* или *теоремой T* (обозначение $T \vdash A$), если существует вывод в T , в котором последняя формула есть A .

Опр.

Формула A *опровержима* в T , если $T \vdash \neg A$.

Опр.

Формула A *независима* от T , если $T \not\vdash A$ и $T \not\vdash \neg A$.

Доказуемость, опровержимость

Опр.

Формула A называется *выводимой (доказуемой) в теории T* или *теоремой T* (обозначение $T \vdash A$), если существует вывод в T , в котором последняя формула есть A .

Опр.

Формула A *опровержима* в T , если $T \vdash \neg A$.

Опр.

Формула A *независима* от T , если $T \not\vdash A$ и $T \not\vdash \neg A$.

Свойства выводимости

- Если $T \subseteq U$ и $T \vdash A$, то $U \vdash A$
(*МОНОТОННОСТЬ*).
- Если $T \vdash A$, то существует такое конечное множество $T_0 \subseteq T$, что $T_0 \vdash A$
(*КОМПАКТНОСТЬ*).
- Если $T \vdash A$ и для каждой аксиомы $B \in T$ имеет место $U \vdash B$, то $U \vdash A$
(*ТРАНЗИТИВНОСТЬ*).

Свойства выводимости

- Если $T \subseteq U$ и $T \vdash A$, то $U \vdash A$
(*МОНОТОННОСТЬ*).
- Если $T \vdash A$, то существует такое конечное множество $T_0 \subseteq T$, что $T_0 \vdash A$
(*КОМПАКТНОСТЬ*).
- Если $T \vdash A$ и для каждой аксиомы $B \in T$ имеет место $U \vdash B$, то $U \vdash A$
(*ТРАНЗИТИВНОСТЬ*).

Свойства выводимости

- Если $T \subseteq U$ и $T \vdash A$, то $U \vdash A$
(*МОНОТОННОСТЬ*).
- Если $T \vdash A$, то существует такое конечное множество $T_0 \subseteq T$, что $T_0 \vdash A$
(*КОМПАКТНОСТЬ*).
- Если $T \vdash A$ и для каждой аксиомы $B \in T$ имеет место $U \vdash B$, то $U \vdash A$
(*ТРАНЗИТИВНОСТЬ*).

Эквивалентность теорий

Пусть T , U — теории сигнатуры Σ .

Опр.

U содержит T , если для любой $A \in T$ $U \vdash A$
(обозначение $U \vdash T$).

Опр.

T и U (дедуктивно) эквивалентны, если $T \vdash U$ и $U \vdash T$ (обозначение $T \equiv U$).

Эквивалентность теорий

Пусть T, U — теории сигнатуры Σ .

Опр.

U содержит T , если для любой $A \in T$ $U \vdash A$
(обозначение $U \vdash T$).

Опр.

T и U (дедуктивно) эквивалентны, если $T \vdash U$ и
 $U \vdash T$ (обозначение $T \equiv U$).

Теорема о тавтологии

Предложение.

Если $A(P_1, \dots, P_n)$ выводима в исчислении высказываний, то для любых формул C_1, \dots, C_n сигнатуры Σ формула $A[P_1/C_1, \dots, P_n/C_n]$ выводима в исчислении предикатов.

Доказательство.

Индукция по построению вывода формулы A .

Теорема о дедукции

Теорема.

Для любой теории T и замкнутой формулы A

$$T, A \vdash B \iff T \vdash A \rightarrow B.$$

Доказательство.

Индукция по длине вывода $T, A \vdash B$. Разбираем лишь новые случаи, относящиеся к правилам $R2$ и $R3$.

Теорема о дедукции

Теорема.

Для любой теории T и замкнутой формулы A

$$T, A \vdash B \iff T \vdash A \rightarrow B.$$

Доказательство.

Индукция по длине вывода $T, A \vdash B$. Разбираем лишь новые случаи, относящиеся к правилам $R2$ и $R3$.

Допустим $B = (C \rightarrow \forall x D[a/x])$ получена из $C \rightarrow D$ по $R2$. По пр. индукции

$$T \vdash A \rightarrow (C \rightarrow D).$$

Надо построить вывод

$$T \vdash A \rightarrow (C \rightarrow \forall x D[a/x]).$$

Рассмотрим тавтологию

$$(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \leftrightarrow (P \wedge Q \rightarrow R).$$

Подставляя A вместо P , C вместо Q и D вместо R получаем, что формула

$$(A \rightarrow (C \rightarrow D)) \leftrightarrow (A \wedge C \rightarrow D)$$

выводима в исчислении предикатов.

Таким образом, вывод $A \rightarrow (C \rightarrow D)$ в T можно продолжить:

$$A \rightarrow (C \rightarrow D)$$

$$(A \rightarrow (C \rightarrow D)) \rightarrow (A \wedge C \rightarrow D) \quad (\text{тавтология})$$

$$(A \wedge C) \rightarrow D \quad (\text{MP})$$

$$(A \wedge C) \rightarrow \forall x D[a/x] \quad (\text{R2, } A \text{ замкнута})$$

$$A \rightarrow (C \rightarrow \forall x D[a/x]) \quad (\text{аналогично})$$

Правило $R3$ рассматривается аналогично.