

# *Вычислимость*

## *лекция 11*

Лев Дмитриевич Беклемишев  
<http://lpcs.math.msu.su/vml2009>

`lbek1@yandex.ru`

23.04.2009

# Теорема Поста

*Теорема.*

$A \subseteq \mathbb{N}$  разрешимо  $\iff A$  и  $\mathbb{N} \setminus A$  перечислимы.

*Доказательство.*

Пусть определённые всюду функции  $f$  и  $g$  перечисляют  $A$  и  $\mathbb{N} \setminus A$ , соответственно.

Вычисляем  $f(0), g(0), f(1), g(1), f(2), g(2), \dots$  до тех пор, пока не встретим данный нам  $x$ .

# Теорема о графике

*Теорема.*

$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  вычислима  $\iff$  множество  $G_f \iff \{\langle x, y \rangle : f(x) = y\}$  перечислимо.

*Доказательство.*

$(\Rightarrow)$  Проверяем  $\langle x, y \rangle \in G_f$  вычисляя  $f(x)$ .

$(\Leftarrow)$  Вычисляем  $f(x)$  перебирая все возможные пары  $\langle x, y \rangle$  и проверяя их на принадлежность  $G_f$ .

# Разрешимость и перечислимость теорий

*Опр.*

Теория  $T$  (в конечной сигнатуре) *эффективно аксиоматизируема*  $\iff$  множество аксиом  $T$  разрешимо.

*Опр.*

Теория  $T$  *разрешима*, если множество теорем  $T$  разрешимо.

*Теорема.*

Теория  $T$  эфф. аксиоматизируема  $\iff$   
множество теорем  $T$  перечислимо.

*Доказательство.*

$(\Rightarrow)$  Порождаем все возможные выводы из аксиом  $T$ .

$(\Leftarrow)$  Пусть  $A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$  — перечисление теорем  $T$ . Тогда множество формул  $A_0, A_0 \wedge A_1, A_0 \wedge A_1 \wedge A_2, \dots$  разрешимо и задаёт эквивалентную теорию.

# Кодирование машин Тьюринга

*Опр.*

Машина  $M = \langle Q, \Sigma, P, q_0, q_1 \rangle$  задаётся

- $Q = \{q_0, \dots, q_s\}$  — внутр. состояния;
- $\Sigma = \{a_0, \dots, a_r\}$  — рабочий алфавит;
- $P = \{p_0, \dots, p_{s(r+1)}\}$  — набор команд.

$q_1$  — нач.,  $q_0$  — кон.,  $a_0 = \#$  — пробел.

# Кодирование $Q$ и $\Sigma$

*Опр.*

Алфавит программ есть  $\Pi \Rightarrow \{\rightarrow, L, N, R, q, a, \mathbf{1}\}$ .

Сопоставим элементам  $Q$  и  $\Sigma$  следующие коды в алфавите  $\Pi$ :  $q_i \mapsto q\mathbf{1}^i$ ;  $a_j \mapsto a\mathbf{1}^j$ .

*Опр.*

Слово  $x \in \Sigma^*$  кодируется конкатенацией  $Code(x)$  кодов всех его букв, например

$$Code(a_2 a_0 a_1) = a\mathbf{1}\mathbf{1}a\mathbf{1}.$$

# Коды команд

Опр.

Код команды  $q_i a_k \rightarrow q_j a_l \nu$ , где  $\nu \in \{L, N, R\}$ , есть слово  $q \mathbf{1}^i a \mathbf{1}^k \rightarrow q \mathbf{1}^j a \mathbf{1}^l \nu$  в алфавите  $\Pi$ .

Код команды  $p \in P$  обозначим  $Code(p)$ .



# Коды машин

*Опр.*

*Код машины  $M$*  есть конкатенация кодов всех её команд, то есть

$$Code(M) \Rightarrow Code(p_0) \dots Code(p_{s(r+1)}).$$

*Утверждение.*

Отображение  $M \mapsto Code(M)$  инъективно.

В частности, по  $Code(M)$  однозначно восстанавливаются рабочий алфавит, множество внутренних состояний, команды и т.д.

*Утверждение.*

*Множество кодов всевозможных машин Тьюринга  
(выбранного нами формата) есть разрешимое  
подмножество  $\Pi^*$ .*

# Функция, вычисляемая машиной Тьюринга

Пусть  $\Delta \subset \Sigma$  и  $\# \notin \Delta$ .

*Опр.*

$M$  чисто вычисляет частичную функцию  
 $f : \Delta^* \rightarrow \Delta^*$ , если для каждого  $x \in \Delta^*$

- если  $x \in \text{dom}(f)$ , то начав работу в конфигурации  $q_1\#x$ , машина  $M$  останавливается в конфигурации  $q_0\#f(x)$ ;
- если  $x \notin \text{dom}(f)$ , то машина  $M$  не останавливается.

*Опр.*

$M$  вычисляет частичную функцию  $f : \Delta^* \rightarrow \Delta^*$ , если для каждого  $x \in \Delta^*$

- если  $x \notin \text{dom}(f)$ , то начав работу в конфигурации  $q_1 \# x$ , машина  $M$  не останавливается;
- если  $x \in \text{dom}(f)$ , то машина  $M$  останавливается, на ленте написано слово  $y = f(x)$ , слева и справа от него стоят символы не из  $\Delta^*$ , а головка остановилась внутри или непосредственно перед  $y$ .

# Обозначения

*Опр.*

$M_{\Delta}(x)$  есть результат работы  $M$  на слове  $x \in \Delta^*$ .

*Опр.*

$M_{\Delta} : \Delta^* \rightarrow \Delta^*$  — частичная функция,  
вычислимая  $M$ .

*Замечание.*

$M_{\Delta}$  определена для любой машины  $M$  с рабочим алфавитом  $\Sigma \supset \Delta$ .

*Утверждение.*

Для любой МТ  $M$  и  $\Delta$  можно указать машину  $M'$  вычисляющую функцию  $M_\Delta$  чисто.

- Преобразуем  $M$  так, чтобы  $M$  не печатала  $\#$  (добавив «двойник» пробела).
- Добавим к программе  $M$  инструкции, определяющие по завершении работы  $M$  слово  $M_\Delta(x)$  и удаляющие весь мусор слева и справа до символов  $\#$ .

# Универсальная машина Тьюринга

*Опр.*

Универсальная машина  $U_{\Delta}$  с рабочим алфавитом, содержащим  $\Pi \cup \Delta \cup \{\$\}$ , для любой МТ  $M$  и слова  $x \in \Delta^*$  (чисто) вычисляет результат работы машины  $M$  на входе  $x$ , то есть частичную функцию

$$\text{Code}(M)\$x \mapsto M_{\Delta}(x).$$

Другими словами:

- Если  $U_\Delta$  начинает работу в конфигурации  $q_1 \# \text{Code}(M) \$ x$  для  $x \in \Delta^*$ , то заключительная конфигурация  $q_0 \# M_\Delta(x)$ ;
- Иначе  $U_\Delta$  зацикливается.



Алгоритм работы машины  $U_{\Delta}$ :

- Читаем входное слово вплоть до первого пробела и проверяем, что оно имеет вид  $Code(M)\$x$  для  $x \in \Delta^*$ . Если нет, зацикливаемся.
- Эмулируем работу  $M$  на входе  $x$ , пользуясь частью ленты справа от  $\$$  для записи кодов конфигураций  $M$ .

- В случае завершения работы  $M$  на входе  $x$  с результатом  $y$  выделяем слово  $Code(y)$  из кода заключительной конфигурации  $M$ .
- Преобразуем  $Code(y)$  в  $y$ .

# Универсальные функции

*Опр.*

$\text{Com}(X, Y)$  есть множество всех частичных вычислимых функций из  $X$  в  $Y$ .

*Опр.*

$\text{TCom}(X, Y)$  есть множество всех тотальных (всюду определённых) вычислимых функций из  $X$  в  $Y$ .

# Условное равенство

Пусть  $f, g$  — частичные функции.

*Опр.*

$f(x) \simeq g(x)$  означает, что  $dom(f) = dom(g)$  и  $\forall x \in dom(f) f(x) = g(x)$ .

*Пример.*

$$x \cdot 1/x \simeq 1/x \cdot x.$$

*Пример.*

$$U_{\Delta}(Code(M)\$x) \simeq M_{\Delta}(x).$$

Пусть  $\mathcal{F}$  — счётное семейство част. функций  $f : X \rightarrow Y$ , например  $\mathcal{F} = \text{Com}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ .

*Опр.*

*Универсальной функцией* для  $\mathcal{F}$  называем такую функцию  $F : \mathbb{N} \times X \rightarrow Y$ , что

- Для любого  $e \in \mathbb{N}$  функция  $f(x) \Rightarrow F(e, x)$  принадлежит  $\mathcal{F}$ .
- $\forall f \in \mathcal{F} \exists e \in \mathbb{N} \forall x \in X f(x) \simeq F(e, x)$ .

*Замечание.*

- Универсальная функция  $F$  существует для любого счётного семейства  $\mathcal{F}$ .
- $F$  определяет некоторую нумерацию  $\mathcal{F}$ :  
 $\mathcal{F} = \{f_0(x), f_1(x), \dots\}$ , где  $f_i(x) \doteq F(i, x)$ .

*Опр.*

Число  $i$  называется *индексом* функции  $f_i$  относительно данной универсальной функции  $F$ .

*Теорема.*

Семейство  $\text{Com}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$  обладает **вычислимой** универсальной функцией  $F \in \text{Com}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{N})$ .

*Доказательство.*

Пусть  $\Delta = \{1\}$ . Обозначим  $\bar{n} \rightleftharpoons 11 \dots 1$  ( $n$  раз).  
Заметим, что  $|\bar{n}| = n$ .

$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  вычислима  $\iff$  вычислима функция  $\bar{f} : \Delta^* \rightarrow \Delta^*$ , определяемая по формуле  $\bar{f}(\bar{n}) \rightleftharpoons \overline{f(n)}$ .

Пусть  $M$  вычисляет  $\bar{f}$ , то есть

$$\forall x \in \Delta^* M_{\Delta}(x) \simeq \bar{f}(x).$$

Рассмотрим выч. биекцию  $\text{word}_{\Pi} : \mathbb{N} \rightarrow \Pi^*$ . Для некоторого  $i \in \mathbb{N}$  имеем  $\text{Code}(M) = \text{word}_{\Pi}(i)$ .

Значит, для всех  $x \in \Delta^*$

$$\bar{f}(x) \simeq M_{\Delta}(x) \simeq U_{\Delta}(\text{word}_{\Pi}(i)\$x).$$



В качестве универсальной функции

$F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  возьмём

$$F(i, n) \Leftrightarrow |U_{\Delta}(\text{word}_{\Pi}(i)\$ \bar{n})|.$$

*Замечание.*

Аналогично, для каждого  $k$  строятся вычислимые универсальные функции для классов  $\text{Com}(\mathbb{N}^k, \mathbb{N})$ , обозначаемые  $F^k$ .

# Вычислимая функция, не продолжаемая до вычислимой тотальной

Пусть  $f, g : X \rightarrow Y$  — частичные функции.

*Опр.*

$g$  *продолжает*  $f$ , если  $f \subseteq g$ , то есть

$\text{dom}(f) \subseteq \text{dom}(g)$  и  $\forall x \in \text{dom}(f) f(x) = g(x)$ .

*Теорема.*

Найдётся такая  $f \in \text{Com}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ , что никакая  $g \in \text{TCom}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$  не продолжает  $f$ .

*Доказательство.*

Диагональный метод Кантора.

Пусть  $f(x) \simeq F(x, x) + 1$ , где  $F$  — универсальная функция.

Функция  $f$  вычислима, т.к. такова  $F$ .

Допустим  $f \subseteq g$  и  $g \in \text{TCom}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ . Тогда найдётся  $i \in \mathbb{N}$

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad g(x) \simeq F(i, x).$$

Т.к.  $\neg g(i)$ , получаем

$$F(i, i) = g(i) = F(i, i) + 1,$$

противоречие.

## *Упражнение*

Построить вычислимую функцию  $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ ,  
не имеющую тотального вычислимого  
продолжения.

# Перечислимое неразрешимое множество

Положим  $K \equiv \text{dom}(f)$ , где  $f$  из предыдущей теоремы, т.е.  $K = \{x \in \mathbb{N} : !F(x, x)\}$ .

*Теорема.*

$K \subseteq \mathbb{N}$  перечислимо, но не разрешимо.

*Доказательство.*

$K$  перечислимо, поскольку  $K$  есть область определения вычислимой функции  $f$ .

Допустим  $K$  разрешимо. Тогда функция

$$g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in K; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

вычислима и является продолжением  $f$  на всё  $\mathbb{N}$ .

# Проблема остановки

Проблема = массовая проблема

Пусть фиксирован алфавит  $\Delta$  и  $\# \notin \Delta$ .

**Задача:** по данной программе (коду машины Тьюринга)  $M$  и исходным данным  $x \in \Delta^*$  узнать, завершает ли работу  $M$  на входе  $x$ .

*Теорема.*

*Проблема остановки алгоритмически неразрешима.*



## *Доказательство.*

В случае разрешимости проблемы остановки мы могли бы построить разрешающий алг. для  $K$ :

- По данному  $x$  вычислить  $y = \text{word}_\Pi(x)$ .
- Проверить, является ли  $y$  кодом МТ с алфавитом, содержащим  $\Delta$ . Если нет, то  $x \notin K$ .
- Иначе проверить, завершает ли работу машина  $M$  с кодом  $y$  на входе  $\bar{x}$ . Если да, то  $x \in K$ , иначе  $x \notin K$ .