Нумерации вычислимых функций и результаты о невычислимости

В этом разделе рассматривается семейство нумераций $\{\varphi_i^m\}$ класса всех вычислимых функции в типе данных N, удовлетворяющее условиям 1–3. Конструкция таких нумераций извлекается из подходящего вычислимого пересчета всех программ машин Тьюринга: $\varphi_i^m(x_1, \ldots, x_m)$ — числовая функция от m переменных, вычисляемая i-той программой. Ее аргументы и значения суть натуральные числа, записываемые на ленте машины Тьюринга в унарной записи.

$\varphi_0^1(x)$	$\varphi_1^1(x)$	$\ldots$	$\varphi_i^1(x)$	$\ldots$
$\varphi_0^2(x,y)$	$\varphi_1^2(x,y)$	$\ldots$	$\varphi_i^2(x,y)$	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
$\varphi_0^m(x_1,\ldots,x_m)$	$\varphi_1^m(x_1,\ldots,x_m)$	$\ldots$	$\varphi_i^m(x_1,\ldots,x_m)$	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

Свойства таблицы нумераций:

1. В строке номер $m = 1, 2, \ldots$ содержатся все вычислимые функции $f : N^m \longrightarrow N$ и только они.

2. При фиксированном m *универсальная* функция

$$u^m(i, x_1, \ldots, x_m) \simeq \varphi_i^m(x_1, \ldots, x_m)$$

   вычислима. (Как следует из предыдущего свойства, она присутствует в $(m+1)$-ой строке.)

3. Выполняется утверждение обобщенной теоремы о параметризации: для каждых $m, n \geq 1$ и каждой вычислимой функции $f\colon N^{m+n} \longrightarrow N$ существует тотальная вычислимая функция $s : N^m \longrightarrow N$ такая, что

$$f(x_1, \ldots x_m, y_1, \ldots, y_n) \simeq \varphi^n_{s(x_1,\ldots x_m)}(y_1, \ldots, y_n)$$

   при всех $x_1, \ldots x_m, y_1, \ldots, y_n \in N$.

Замечание 1. По свойству 1, для вычислимой функции $f\colon N^{m+n} \longrightarrow N$ и фиксированных значений $x_1, \ldots, x_m$ функция

$$g(y_1, \ldots, y_n) \simeq f(x_1, \ldots x_m, y_1, \ldots, y_n)$$

присутствует в n-ой строке таблицы. Свойство 3 утверждает, что ее номер может быть вычислен по значениям $x_1, \ldots, x_m$ с помощью подходящей тотальной вычислимой функции.

Замечание 2. Для доказательства невычислимости числовой функции достаточно установить, что ее нет в таблице.

Задачи

Задача 1. (а) Доказать, что функция $f(x) \simeq \varphi_x^1(x) + 1$ вычислима, но не имеет вычислимых тотальных продолжений.

(б) Доказать, что множество $K = \{x \mid \varphi_x^1(x) \text{ определено}\}$ перечислимо, но неразрешимо.

(в) Доказать, что множество $STOP = \{(i, x) \mid \varphi_i^1(x) \text{ определено}\}$ перечислимо, но неразрешимо.

Решение. (а) Попытаемся найти значение $g(k)$, где g - кандидат в вычислимое тотальное продолжение, а k – его номер. Согласно определению числа k имеем $\varphi_k^1(k) \simeq g(k)$. Так как функция g тотальна, то значение $g(k)$ определено, откуда следует определенность значения $f(k) = \varphi_k^1(k)+1 = g(k)+1$. Тем самым, значение $f(k)$ определено и отлично от $g(k)$, поэтому g не является продолжением f.

(б) Перечислимость. Множество K является областью определения вычислимой функции $f(x) = u^1(x, x)$. Отсюда следует его полуразрешимость, что эквивалентно перечислимости.

Неразрешимость. Исходя из предположения о разрешимости множества K можно предложить алгоритм вычисления тотального продолжения

$$g(x) = \begin{cases} \varphi_x^1(x) + 1, & x \in K, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

функции f из (а):

> Следует вычислить значение $p = \chi_K(x)$ характеристической функции множества K. Если $p = 0$, то значение $g(x)$ есть 0. В противном случае $p = 1$. Это означает, что $x \in K$, значение $\varphi_x^1(x)$ определено и может быть вычислено с помощью универсальной функции: $\varphi_x^1(x) = u^1(x, x)$. Тогда $g(x) = u^1(x, x) + 1$.

Но согласно утверждению (а), у функции f нет вычислимых тотальных продолжений, поэтому предположение о разрешимости множества K неверно.

(в) Указание: неразрешимость следует из (б).

Задача 2. (а) Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} 100, & \varphi_x^1(x) = 59, \\ 59, & \text{иначе} \end{cases}$$

не является вычислимой.

(б) Доказать, что множество $\{x \mid \varphi_x^1(x) = 59\}$ перечислимо, но неразрешимо.

Решение. Указание:(а) предположить, что f вычислима, и попытаться найти значение $f(k)$, где k – номер f.

Задача 3. (а) Пусть $g : N \longrightarrow N$ фиксированная вычислимая функция, ζ – нигде не определенная функция, $A \subseteq N$ - перечислимое множество.

Доказать, что существует тотальная вычислимая функция s такая, что

$$\varphi^1_{s(i)} = \begin{cases} g, & i \in A, \\ \zeta, & i \notin A. \end{cases}$$

(Вычислимая функция s сводит задачу распознавания принадлежности множеству A к задаче различения функций g и ζ.)

(б) Пользуясь сведением из (а) установить неразрешимость следующих множеств:
$\{i \mid \varphi^1_i(5) = 25\}$;
$\{i \mid \varphi^1_i(i) = 99\}$;
$\{i \mid \varphi^1_i$ тотальна$\}$.
$\{i \mid \varphi^1_i$ нигде не определена$\}$.
Решение. (а) Указание: установить вычислимость функции

$$f(i, x) \simeq \begin{cases} g(x), & i \in A, \\ \text{не определено}, & i \notin A \end{cases}$$

и применить свойство 3.

(б) Указание: взять в качестве A произвольное неразрешимое перечислимое множество и подобрать подходящую вычислимую функцию g.

Задача 4. (а) Теорема Райса. Пусть $\mathcal{P}$ — семейство одноместных вычислимых функций, $\mathcal{P} \neq \emptyset$ и существует одноместная вычислимая функция $f \notin \mathcal{P}$. Доказать, что его индексное множество $\{i \mid \varphi^1_i \in \mathcal{P}\}$ неразрешимо.

(б) С помощью теоремы Райса установить неразрешимость следующих множеств:
$\{i \mid \varphi^1_i$ тотальна$\}$;
$\{i \mid \varphi^1_i$ нигде не определена$\}$;
$\{i \mid \varphi^1_i(5) = 25\}$;
$\{i \mid \varphi^1_i(5)$ определено$\}$;
$\{i \mid \varphi^1_i$ монотонна$\}$.

Решение. (а) Указание. Воспользоваться задачей 3. В качестве A взять произвольное неразрешимое перечислимое множество. При подходящем выборе функции g конструкция из 3(а) сводит задачу разрешения множества A к аналогичной задаче для индексного множества семейства $\mathcal{P}$.

(б) Указание. Заметить, что все приведенные множества являются индексными множествами подходящих семейств вычислимых функций.

Задача 5. Доказать неперечислимость множеств:
(а) $\{i \mid \varphi^1_i(5)$ не определено$\}$;
(б) $\{i \mid \varphi^1_i(5)$ не определено или $\neq 25\}$;
(в) $\{i \mid \varphi^1_i$ не принимает значений $> 25\}$;
(г) $\{i \mid \neg\exists x(\varphi^1_i(x) = x)\}$;
Решение. (а) Указанное множество является индексным множеством семейства всех одноместных вычислимых функций, не определенных при

$x = 5$. Оно неразрешимо по теореме Райса. Согласно критерию разрешимости (теорема Чёрча-Поста), либо оно, либо его дополнение не может быть перечислимым множеством. Установим перечислимость его дополнения $\{i \mid \varphi_i^1(5) \text{ определено}\}$. Для этого достаточно предложить алгоритм вычисления полухарактеристической функции дополнения:

> Вход i. С помощью вычислимой универсальной функции u^1 организовать вычисление значения $\varphi_i^1(5) \simeq u^1(i, 5)$. Когда процесс вычисления закончится (если такое произойдет), выдать результат 1.

Тем самым, дополнение перечислимо, а сами исходное множество — неперечислимо.

Задача 6. Доказать неразрешимость множеств:
(а) $\{(i, j) \mid \varphi_i^1 \text{ есть продолжение } \varphi_j^1\}$;
(б) $\{(i, j) \mid D(\varphi_i^1) \cup D(\varphi_j^1) = N\}$;
(в) $\{(i, j) \mid D(\varphi_i^1) \cap D(\varphi_j^1) = \emptyset\}$;
(г) $\{(i, j) \mid \varphi_i^1, \varphi_j^1 \text{ тотальны и } \forall x(\varphi_i^1(x) = 2\varphi_j^1(x))\}$;
Решение. Указание: подобрать сечение $A \subseteq N$ рассматриваемого множества, неразрешимость которого можно установить с помощью теоремы Райса.

(а) Фиксируем число j_0 — номер вычислимой функции

$$f(x) \simeq \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \text{не определено}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Множество $M_0 = \{i \mid \varphi_i^1 \text{ есть продолжение } \varphi_{j_0}^1\} = \{i \mid \varphi_i^1(0) = 0\}$ является индексным множеством семейства одноместных вычислимых числовых функций f, удовлетворяющих условию $f(0) = 0$, которое непусто и не совпадает с семейством всех одноместных вычислимых числовых функций. Согласно теореме Райса, множество M_0 неразрешимо. Но его характеристическая функция χ_{M_0} связана с характеристической функцией χ_M исходного множества M соотношением $\chi_{M_0}(i) = \chi_M(i, j_0)$, которое позволяло бы вычислять функцию χ_{M_0} в случае разрешимого множества M. Поэтому множество M неразрешимо.