**Упражнение 1.** Определите, является ли каждая из следующих формул тавтологией, тождественно ложной формулой или ни тем, ни другим. Являются ли эти формулы выполнимыми?

1) $P \leftrightarrow (\neg P \vee \neg P)$ 3) $((Q \to P) \to Q) \to Q$

2) $(P \to Q) \wedge R \to P$ 4) $\neg P \to P \wedge Q$

**Решение 1.** Обозначим изучаемую формулу через $A$ и составим её истинностную таблицу:

1)

| $P$ | $A$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 0 |

3)

| $P$ | $Q$ | $A$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

2)

| $P$ | $Q$ | $R$ | $A$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

4)

| $P$ | $Q$ | $A$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

Таким образом, формула 1) является тождественно ложной, формула 3) — тавтологией, а формулы 2) и 4) не являются ни тем, ни другим. При этом, формулы 2), 3) и 4) выполнимы.

**Упражнение 2.** Упростите формулы:

1) $(P \vee Q) \wedge Q$ 3) $(P \to Q) \wedge (P \to R)$

2) $(\neg P \wedge Q) \vee P$ 4) $(Q \to P) \wedge R \to P$

**Решение 2.**

1) Фиксируем произвольную истинностную оценку переменных $f$ и докажем, что $f((P \vee Q) \wedge Q) = f(Q)$. Действительно, если $f(Q) = 0$, то $f((P \vee Q) \wedge Q) = 0$ не зависимо от возможной оценки $f(P \vee Q)$. Если же $f(Q) = 1$, то $f(P \vee Q) = 1$ и $f((P \vee Q) \wedge Q) = f(P \vee Q) \wedge f(Q) = 1$. Следовательно, $(P \vee Q) \wedge Q \equiv Q$. (Заметим, что данная эквивалентность входит в таблицу основных эквивалентностей, данную на лекции.)

2) $(\neg P \wedge Q) \vee P \equiv (\neg P \vee P) \wedge (Q \vee P) \equiv P \vee Q$.

3) Докажем, что $(P \to Q) \wedge (P \to R) \equiv P \to Q \wedge R$: $(P \to Q) \wedge (P \to R) \equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \equiv \neg P \vee (Q \wedge R) \equiv P \to (Q \wedge R)$

4) $(Q \to P) \wedge R \to P \equiv \neg((\neg Q \vee P) \wedge R) \vee P \equiv \neg(\neg Q \vee P) \vee \neg R \vee P \equiv (\neg\neg Q \wedge \neg P) \vee \neg R \vee P \equiv (Q \wedge \neg P) \vee P \vee \neg R \equiv ((Q \vee P) \wedge (\neg P \vee P)) \vee \neg R \equiv P \vee Q \vee \neg R$.

**Упражнение 3.** Составьте формулу от трёх переменных, истинную в том случае, если большинство входящих в неё переменных истинно.

**Решение 3.** Обозначим переменные через $P$, $Q$ и $R$. "Большинство переменных истинно" означает, что истинно не менее двух из них. В свою очередь, это означает, что либо одновременно истинны $P$ и $Q$, или $Q$ и $R$, или $P$ и $R$. Будучи записанным с помощью логических связок, это рассуждение приводит к формуле

$$A = (P \wedge Q) \vee (Q \wedge R) \vee (P \wedge R),$$

которая и является искомым ответом. (Заметим, что случай, когда все три переменные истинны также возможен и приводит к истинности $A$.)

**Упражнение 4.** (*Принцип двойственности.*) Пусть $A$ — пропозициональная формула, содержащая только связки $\vee$, $\wedge$ и $\neg$, и формула $A^*$ получается из $A$ заменой $\vee$ на $\wedge$ и $\wedge$ на $\vee$. Доказать, что если $A \equiv B$, то $A^* \equiv B^*$.

**Решение 4.** Пусть в формулах $A$ и $B$ встречаются пропозициональные переменные $P_1, \ldots, P_n$ и только они. Для произвольной формулы $C$ от данных переменных и произвольного набора $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \{0,1\}^n$ будем обозначать через $\phi_C(\vec{a})$ истинностное значение $C$, получающееся при оценке $f(P_i) = a_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Будем также писать $\neg\vec{a}$ для обозначения набора $(\neg a_1, \ldots, \neg a_n)$.

Мы докажем вначале следующее свойство: $\phi_{C^*}(\vec{a}) = \neg\phi_C(\neg\vec{a})$ для всех $\vec{a}$. Доказательство проведем индукцией по построению формулы $C$.

Если $C$ — переменная, то есть $C = P_i$, то $C^* = P_i$, так что

$$\phi_{C^*}(\vec{a}) = a_i = \neg(\neg a_i) = \neg\phi_C(\neg\vec{a}).$$

Иначе, формула $C$ имеет вид $\neg D$, $(D_1 \wedge D_2)$, $(D_1 \vee D_2)$. Рассмотрим эти случаи по отдельности.

1) $C = \neg D$. Тогда $C^* = \neg D^*$. Следовательно,

$$\phi_{C^*}(\vec{a}) = \neg\phi_{D^*}(\vec{a}) = \neg\neg\phi_D(\neg\vec{a}) = \neg\phi_C(\neg\vec{a}).$$

2) $C = (D_1 \vee D_2)$. Тогда $C^* = D_1^* \wedge D_2^*$. Имеем:

$$\begin{aligned}\phi_{C^*}(\vec{a}) = \phi_{D_1^*}(\vec{a}) \wedge \phi_{D_2^*}(\vec{a}) = \neg\phi_{D_1}(\neg\vec{a}) \wedge \neg\phi_{D_2}(\neg\vec{a}) = \\ = \neg\Big(\phi_{D_1}(\neg\vec{a}) \vee \phi_{D_2}(\neg\vec{a})\Big) = \neg\phi_C(\neg\vec{a}).\end{aligned}$$

3) $C = (D_1 \wedge D_2)$. Этот случай разбирается аналогично, проделайте это самостоятельно.

Итак, вспомогательное утверждение доказано. Теперь для завершения рассуждения рассмотрим произвольный набор значений $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \{0,1\}^n$. Тогда

$$\phi_{A^*}(\vec{a}) = \neg\phi_A(\neg\vec{a}) = \neg\phi_B(\neg\vec{a}) = \phi_{B^*}(\vec{a}).$$

В силу произвольности $\vec{a}$ заключаем, что $A^* \equiv B^*$, что и требовалось.

**Упражнение 5.** Постройте некоторую формулу $A$, такую чтобы данные формулы были тавтологией:

1) $(A \wedge Q \to \neg P) \to ((P \to \neg Q) \to A)$

2) $(R \to A) \leftrightarrow (R \to P \wedge Q)$,  $(A \to R) \leftrightarrow (\neg(P \vee Q) \to R)$

**Решение 5.** 1) Обозначим данную по условию формулу через $B$. Обозначим через $f$ истинностную оценку переменных и рассмотрим следующие случаи:

a) $f(P)=0$, $f(Q)=0$: имеем $f(B)=(f(A)\wedge 0\to\neg 0)\to((0\to\neg 0)\to f(A))=(0\to 1)\to((0\to 1)\to f(A))=1\to(1\to f(A))=f(A)$;

b) $f(P)=0$, $f(Q)=1$: имеем $f(B)=(f(A)\wedge 1\to\neg 0)\to((0\to\neg 1)\to f(A))=\neg f(A)\to f(A)=f(A)$;

c) $f(P)=1$, $f(Q)=0$: имеем $f(B)=(f(A)\wedge 0\to\neg 1)\to((1\to\neg 0)\to f(A))=1\to(1\to f(A))=f(A)$;

d) $f(P)=1$, $f(Q)=1$: имеем $f(B)=(f(A)\wedge 1\to\neg 1)\to((1\to\neg 1)\to f(A))=(f(A)\to 0)\to(0\to f(A))=\neg f(A)\to 1=1$.

Итак, для того, чтобы $B$ была тавтологией необходимо и достаточно, чтобы при $f(P)\neq 1$ или $f(Q)\neq 1$ выполнялось свойство $f(A)=1$. К примеру, годится вариант $A=P\vee\neg P$.

*Дополнительный вопрос*: рассмотрим всевозможные формулы $A$, удовлетворяющие условиям задачи. Сколько различных булевых функций $\phi_A$ они задают?

2) Будем рассуждать аналогично предыдущему пункту.

a) Пусть $f(R)=0$, тогда истинностные значения формул из условия принимают вид: $1\leftrightarrow 1=1$ и $\neg f(A)\leftrightarrow\neg(f(P)\vee f(Q))=f(A)\leftrightarrow f(P)\vee f(Q)$ соответственно. Требование равенства последнего выражения единице полностью определяет значения $f(A)$ при $f(R)=0$.

b) Пусть $f(R)=1$, тогда получаем $f(A)\leftrightarrow f(P)\wedge f(Q)$ и $1\leftrightarrow 1$. И снова значения $f(A)$ полностью заданы.

Для того, чтобы составить требуемую формулу $A$, запишем:

$$A=R\wedge(P\wedge Q)\vee\neg R\wedge(P\vee Q).$$

Легко видеть, что данная формула удовлетворяет вышеуказанным требованиям как при $f(R)=0$, так и при $f(R)=1$.

**Упражнение 6.** Приведите к ДНФ следующие формулы:

1) $P\vee Q\to R\vee S$
2) $P\wedge(Q\vee R\to S)$
3) $((P\to Q)\to R)\to P$

**Решение 6.** Преобразуем формулы к требуемому виду, используя законы де Моргана, свойства дистрибутивности конъюнкции и дизъюнкции, эквивалентность $P\to Q\equiv\neg P\vee Q$, а также закон снятия двойного отрицания:

1) $P\vee Q\to R\vee S\equiv\neg(P\vee Q)\vee(R\vee S)\equiv(\neg P\wedge\neg Q)\vee R\vee S$.

2) $P\wedge(Q\vee R\to S)\equiv P\wedge(\neg(Q\vee R)\vee S)\equiv P\wedge((\neg Q\wedge\neg R)\vee S)\equiv(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge S)$.

3) $((P\to Q)\to R)\to P\equiv\neg(\neg(\neg P\vee Q)\vee R)\vee P\equiv\neg((P\wedge\neg Q)\vee R)\vee P\equiv(\neg(P\wedge\neg Q)\wedge\neg R)\vee P\equiv((\neg P\vee Q)\wedge\neg R)\vee P\equiv(\neg P\wedge\neg R)\vee(Q\wedge\neg R)\vee P$.

**Упражнение 7.** Определите, является ли каждая из следующих формул тавтологией, противоречием или ни тем, ни другим:

1) $(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow(P\leftrightarrow(Q\leftrightarrow P))$ 2) $P\wedge\neg(P\vee Q)$
3) $(P\to Q)\leftrightarrow(\neg P\vee Q)$ 4) $(P\to Q)\leftrightarrow\neg(P\wedge\neg Q)$

**Упражнение 8.** Доказать логическую эквивалентность следующих пар формул:

1) $\neg\neg P\equiv P$ 5) $P\to Q\equiv\neg Q\to\neg P$
2) $P\to Q\equiv\neg P\vee Q$ 6) $P\leftrightarrow(Q\leftrightarrow R)\equiv(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow R$
3) $P\to\neg P\equiv\neg P$ 7) $\neg(P\to Q)\equiv P\wedge\neg Q$
4) $\neg P\to Q\equiv\neg Q\to P$ 8) $P\to(Q\to R)\equiv P\wedge Q\to R$

**Упражнение 9.** Постройте формулу $A$ от переменных $P$, $Q$ и $R$, такую что

1) $P \wedge A \equiv P \wedge Q,\ \ P \vee A \equiv P \vee Q$
2) $P \to A \equiv Q \to (\neg P \vee R),\ \ (R \to Q) \to P \equiv \neg P \to \neg A$
3) $(Q \to P) \to ((P \wedge \neg A) \leftrightarrow Q),\ \ (A \to R) \to (P \vee (A \leftrightarrow Q))$

**Упражнение 10.** Существует ли формула $A$, составленная лишь из символов пропозициональных переменных $P$, $Q$, связок "импликация" ($\to$) и скобок, для которой справедливы нижеследующие эквивалентности?

1) $A \equiv P \vee Q$ 3) $A \equiv P \vee \neg Q$
2) $A \equiv P \wedge Q$ 4) $A \equiv P \wedge \neg Q$

**Упражнение 11.** Составьте формулу от трёх переменных, истинную в том случае, если ровно две входящих в неё переменные истинны.

**Упражнение 12.** Приведите к КНФ следующие формулы:

1) $(P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge R) \vee (\neg Q \wedge R)$
2) $((P \to Q) \to P) \leftrightarrow P$
3) $((R \to Q) \to P) \to Q$
4) $(P \vee \neg R) \wedge (R \vee \neg P \vee \neg Q)$

**Упражнение 13.** Составьте формулу $A$ от пропозициональных переменных $P$, $Q$, $R$, которая обладает следующей таблицей истинности:

1)

| $P$ | $Q$ | $R$ | $A$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

2)

| $P$ | $Q$ | $R$ | $A$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |