Логика предикатов лекция 8

Лев Дмитриевич Беклемишев
http://lpcs.math.msu.su/vml2008

lbekl@yandex.ru

27.03.2008

Полнота и компактность

Теорема.

Теория T непротиворечива $\iff$ T выполнима (имеет модель).

Теорема.

Теория T выполнима $\iff$ любое конечное подмножество $T_0 \subseteq T$ выполнимо.

Пусть St_Σ — множество предложений сигнатуры Σ

Опр.

Элементарная теория модели M есть множество $Th(M) \rightleftharpoons \{A \in St_\Sigma : M \vDash A\}$.

Элементарная эквивалентность

Опр.

Модели M и N сигнатуры Σ *элементарно эквивалентны* ($M \equiv N$), если в M и в N истинны одни и те же предложения Σ, т.е. если $Th(M) \equiv Th(N)$.

Утверждение.

$M \cong N$ влечёт $M \equiv N$. Обратное, вообще говоря, неверно.

Подмодели

Опр.

$(N;\Sigma)$ есть *подмодель* модели $(M;\Sigma)$, если $N \subseteq M$ и для всех $P \in \mathrm{Pred}_\Sigma$, $f \in \mathrm{Func}_\Sigma$, $c \in \mathrm{Const}_\Sigma$ имеем $P_N = P_M \restriction N$, $c_M \in N$, N замкнуто относительно f_M и $f_N = f_M \restriction N$.

Пример.

Если $(G;\cdot,1,x^{-1})$ — группа, то подмодели G суть подгруппы группы G. Если же G рассматривается как модель $(G;\cdot,1)$, то её подмоделями будут подполугруппы с единицей группы G.

Элементарные подмодели

Опр.

Подмодель $(N;\Sigma)$ модели $(M;\Sigma)$ *элементарна* (обозначение $N \preccurlyeq M$), если для всех $A \in \mathrm{Fm}_\Sigma$

$$\forall \vec{x} \in N \, (N \models A[\vec{x}] \iff M \models A[\vec{x}]).$$

Утверждение.

$N \preccurlyeq M$ *влечёт* $N \equiv M$.

Пример.

Если M — нестандартная модель $Th(\mathbb{N})$, то $\mathbb{N} \preccurlyeq M$.

Теорема Лёвенгейма–Сколема

Пусть Σ — счётная сигнатура.

Теорема.

Всякая модель $(M; \Sigma)$ имеет (конечную или) счётную элементарную подмодель.

Следствие.

Всякая непротиворечивая теория в счётной сигнатуре имеет (конечную или) счётную модель.

Следствия

- Существуют счётные модели $Th(\mathbb{R})$ и $Th(\mathbb{C})$.
- Существует счётная модель элементарной геометрии.
- Если теория множеств ZFC непротиворечива, то существует и счётная модель ZFC.

Доказательство.

Построим последовательность счётных подмножеств M $\quad N_0 \subseteq N_1 \subseteq N_2 \subseteq \dots$ такую, что

- N_0 — непустое счётное подмножество M.
- Для каждой формулы $A[a, \vec{b}]$ и набора $\vec{y} \in N_k$, если $M \vDash \exists v A[v, \vec{y}]$ выберем $x \in M$ такой, что $M \vDash A[x, \vec{y}]$. Добавим все такие x к N_k и получим N_{k+1}.

Положим $N \rightleftharpoons \bigcup_{k \geq 0} N_k$.

Лемма.
Для любой формулы A и всех $\vec{y} \in N$

$$M \models \exists v A[v, \vec{y}] \iff \exists x \in N \;\; M \models A[x, \vec{y}].$$

Лемма.
N есть подмодель M.

Доказательство.
Пусть $\vec{x} \in N$, $f \in \mathrm{Func}_\Sigma$. Поскольку $M \models \exists v\, f(\vec{x}) = v$, имеем $y \in N$ такой, что $M \models f(\vec{x}) = y$, т.е. $f_M(\vec{x}) \in N$.

Индукцией по построению A теперь покажем

$$\forall \vec{y} \in N \, (N \vDash A[\vec{y}] \iff M \vDash A[\vec{y}]).$$

- Для атомарных формул A следует из того, что N — подмодель M.
- Для $A = \neg B,\ B \wedge C,\ B \vee C$ вытекает из предположения индукции.
- Допустим $A = \exists v B[a/v]$. Тогда

$$M \vDash \exists v B[a/v, \vec{y}] \iff \exists x \in N \;\; M \vDash B[x, \vec{y}]$$
$$\iff \exists x \in N \;\; N \vDash B[x, \vec{y}] \iff N \vDash \exists v B[a/v, \vec{y}].$$

Обобщение о понижении мощности

Теорема.

Пусть $(M; \Sigma)$ *— бесконечная модель в счётной сигнатуре и* $\lambda \leq |M|$ *— бесконечная мощность. Тогда найдётся подмодель* $N \preccurlyeq M$ *такая, что* $|N| = \lambda$.

Доказательство.

Та же конструкция, но начинаем с любого подмножества $N_0 \subseteq M$ мощности λ.

Теорема Лёвенгейма–Сколема о повышении мощности

Пусть Σ — счётная сигнатура.

Теорема.

Для любой бесконечной модели $(M; \Sigma)$ и мощности $\lambda \geq |M|$ найдётся модель $(N; \Sigma)$ такая, что $M \preccurlyeq N$ и $|N| = \lambda$.

Доказательство.

Возьмём $X \supseteq M$, $|X| = \lambda$. Рассмотрим сигнатуру $\Sigma_X \rightleftharpoons \Sigma \cup \{\underline{c} : c \in X\}$ и теорию $T := Th(M; \Sigma_X) \cup \{\underline{c} \neq \underline{d} : c, d \in X, c \neq d\}$.

Каждая конечная подтеория T совместна. По теореме о компактности T имеет нормальную модель N. Но функция $\varphi : c \longmapsto (\underline{c})_N$ инъективна в силу аксиом T, следовательно $|N| \geq |X| = \lambda$. Т.к. $N \vDash Th(M; \Sigma_X)$, то $\varphi(M)$ есть подмодель N, изоморфная M и $\varphi(M) \preccurlyeq N$.

Следствие.

Если теория T имеет бесконечную модель, то T имеет модели любой бесконечной мощности.

Следствие.

Множество $Th(\mathbb{N})$ всех предложений истинных в стандартной модели арифметики имеет модели любой бесконечной мощности.

Полные теории

Опр.

Теория T *полна*, если

- T непротиворечива;
- Для любого предложения A в языке T
  $T \vdash A$ или $T \vdash \neg A$.

Пример.

$Th(M)$ для любой модели M.

Утверждение.

Если T полна и $M \models T$, то $T \equiv Th(M)$.

Теорема. (Линденбаум)

Всякая непротиворечивая теория имеет полное расширение.

Аксиоматизируемость

Опр.

Теория T *эффективно аксиоматизируема*, если существует алгоритм, распознающий аксиомы T.

Опр.

Теория T *разрешима*, если существует алгоритм, распознающий теоремы T.

Теорема.

Если T полна и эффективно аксиоматизируема, то T разрешима.

Доказательство.

Пусть дано предложение A. Перебираем все возможные выводы в T до тех пор, пока не встретим доказательство A или доказательство $\neg A$. Полнота гарантирует, что одно из двух произойдёт.

Примеры полных эфф. аксиоматизируемых теорий

- Элементарная геометрия (G1-G11). $Th(\mathbb{R}^2; =, \cong, B)$
- Теория вещественно замкнутых упорядоченных полей. $Th(\mathbb{R}; =, <, +, \cdot, 0, 1)$
- Теория алгебраически замкнутых полей характеристики 0. $Th(\mathbb{C}; =, +, \cdot, 0, 1)$
- Теория плотных линейных порядков без первого и последнего элементов. $Th(\mathbb{Q}; =, <)$

Универсальные теории

- *Арифметика Пеано* PA.
  Формализует математику конечного.
  Основана на аксиомах для натуральных чисел в сигнатуре $=$, 0, S, $+$, $\cdot$.

- *Теория множеств Цермело–Френкеля (с аксиомой выбора)* ZFC.
  Формализует всю «обычную» математику.
  Основана на аксиомах для множеств и отношения принадлежности $\in$.

Аксиомы PA

1. аксиомы равенства для S, $+$, $\cdot$;
2. $\neg S(a) = 0, \quad S(a) = S(b) \to a = b,$
3. $a + 0 = a, \quad a + S(b) = S(a + b),$
4. $a \cdot 0 = a, \quad a \cdot S(b) = a \cdot b + a,$
5. (Схема аксиом индукции)

   $$A[a/0] \wedge \forall x\,(A[a/x] \to A[a/S(x)]) \to \forall x\,A[a/x]$$

   для любой формулы A.

Первая теорема Гёделя о неполноте

Теорема.

Если T содержит PA, непротиворечива и эффективно аксиоматизируема, то T неполна.

Следствие.

- PA неполна.
- ZFC неполна при условии её непротиворечивости.

Интерпретируемость моделей

Опр.

Модель $(M; P^2, f^1)$ (жёстко) *интерпретируема в* $(N; \Sigma)$, если заданы формулы $P_I(a, b)$, $F_I(a, b)$ и $D_I(a)$ сигнатуры Σ такие, что модель $(M_I; P_I, f_I)$ изоморфна M, где $M_I = \{x \in N : N \vDash D_I[x]\}$, а P_I и f_I — предикат и функция на M_I определимые в N формулами P_I и F_I, соответственно.

Пример.

$(\mathbb{Z}; <)$ интерпретируема в $(\mathbb{N}; +, =)$.

$E(a) \rightleftharpoons (\exists x\, x + x = a)$ «a чётно»

$$
\begin{aligned}
a <_I b \quad \Longleftrightarrow \quad & (E(a) \wedge E(b) \wedge a > b) \vee \\
& (E(a) \wedge \neg E(b)) \vee \\
& (\neg E(b) \wedge \neg E(a) \wedge a < b)
\end{aligned}
$$

Чётные $=$ отрицательные,
нечётные $=$ положительные.

Общие интерпретации

Допустимы параметры и кодирование одного объекта из M набором объектов из M'.

Опр.

Модель $(M; =, P^2, f^1)$ интерпретируема в $(N; \Sigma)$, если заданы формулы $P_I(\vec{a}, \vec{b}, \vec{p})$, $F_I(\vec{a}, \vec{b}, \vec{p})$, $=_I(\vec{a}, \vec{b}, \vec{p})$ и $D_I(\vec{a}, \vec{p})$ сигнатуры Σ и константы $\vec{c}$ такие, что модель $(M_I; P_I, f_I)/{=_I}$ изоморфна M, где $M_I = \{\vec{x} \in N^n : N \vDash D_I[\vec{x}, \vec{c}]\}$, а P_I и f_I — предикат и функция на M_I определимые в $(N; \vec{c})$ формулами P_I и F_I, соответственно.

Пример.

$(\mathbb{R}^2; =, B, \cong)$ интерпретируема в $(\mathbb{R}; =, +, \cdot, 0, 1)$.

$a \leq b \rightleftharpoons (\exists z\ a + z \cdot z = b)$
$a - b = c \rightleftharpoons (c + b = a)$

$$D(a_1, a_2) \rightleftharpoons (a_1 = a_1 \wedge a_2 = a_2)$$

$$B_I(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \rightleftharpoons \exists \lambda, \mu\, (0 \leq \lambda \wedge 0 \leq \mu \wedge \\ \wedge\, \lambda + \mu = 1 \wedge \vec{b} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{c})$$

$$\vec{a}\vec{b} \cong_I \vec{c}\vec{d} \rightleftharpoons (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 = \\ = (c_1 - d_1)^2 + (c_2 - d_2)^2.$$