

Логика предикатов
лекция 6

Лев Дмитриевич Беклемишев
<http://lpcs.math.msu.su/vml2008>

lbek1@yandex.ru

13.03.2008

Изоморфизм моделей

Пусть M и M' — модели сигнатуры Σ .

Опр.

Гомоморфизм $\varphi : M \rightarrow M'$ есть отображение из M в M' , сохраняющее все предикаты, функции и константы Σ , то есть

... для всех $P \in \text{Pred}_\Sigma$, $f \in \text{Func}_\Sigma$ и $c \in \text{Const}_\Sigma$

$$\begin{aligned} P_M(x_1, \dots, x_n) &\Rightarrow P_{M'}(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)) \\ \varphi(f_M(x_1, \dots, x_n)) &= f_{M'}(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)) \\ \varphi(c_M) &= c_{M'} \end{aligned}$$

Предложение.

Композиция гомоморфизмов — гомоморфизм.

... для всех $P \in \text{Pred}_\Sigma$, $f \in \text{Func}_\Sigma$ и $c \in \text{Const}_\Sigma$

$$\begin{aligned} P_M(x_1, \dots, x_n) &\Rightarrow P_{M'}(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)) \\ \varphi(f_M(x_1, \dots, x_n)) &= f_{M'}(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)) \\ \varphi(c_M) &= c_{M'} \end{aligned}$$

Предложение.

Композиция гомоморфизмов — гомоморфизм.

Опр.

Изоморфизм $\varphi : M \rightarrow M'$ есть гомоморфизм, у которого есть обратный, то есть гомоморфизм $\psi : M' \rightarrow M$ такой, что

$$\varphi \circ \psi = id_{M'}, \quad \psi \circ \varphi = id_M,$$

где $id_M : M \rightarrow M$ — тождественный гомоморфизм $id_M(x) = x$.

Опр.

M и M' изоморфны, если существует изоморфизм $\varphi : M \rightarrow M'$.

Опр.

Изоморфизм $\varphi : M \rightarrow M'$ есть гомоморфизм, у которого есть обратный, то есть гомоморфизм $\psi : M' \rightarrow M$ такой, что

$$\varphi \circ \psi = id_{M'}, \quad \psi \circ \varphi = id_M,$$

где $id_M : M \rightarrow M$ — тождественный гомоморфизм $id_M(x) = x$.

Опр.

M и M' изоморфны, если существует изоморфизм $\varphi : M \rightarrow M'$.

Теорема.

Если $\varphi : M \rightarrow M'$ — изоморфизм, то для любой формулы $A(a_1, \dots, a_n)$ и любых $c_1, \dots, c_n \in M$

$$M \models A[c_1, \dots, c_n] \iff M' \models A[\varphi(c_1), \dots, \varphi(c_n)].$$

Доказательство.

Индукция по построению A .

Следствие.

В изоморфных моделях истинны одни и те же предложения.

Теорема.

Если $\varphi : M \rightarrow M'$ — изоморфизм, то для любой формулы $A(a_1, \dots, a_n)$ и любых $c_1, \dots, c_n \in M$

$$M \models A[c_1, \dots, c_n] \iff M' \models A[\varphi(c_1), \dots, \varphi(c_n)].$$

Доказательство.

Индукция по построению A .

Следствие.

В изоморфных моделях истинны одни и те же предложения.

Теорема.

Если $\varphi : M \rightarrow M'$ — изоморфизм, то для любой формулы $A(a_1, \dots, a_n)$ и любых $c_1, \dots, c_n \in M$

$$M \models A[c_1, \dots, c_n] \iff M' \models A[\varphi(c_1), \dots, \varphi(c_n)].$$

Доказательство.

Индукция по построению A .

Следствие.

В изоморфных моделях истинны одни и те же предложения.

Доказательство невыразимости методом автоморфизма

Аutomорфизмом $\varphi : M \rightarrow M$ называется изоморфизм модели на себя.

Пример.

В модели $(\mathbb{Z}; =, +)$ не выразим предикат \leq .

Доказательство.

Отображение $\varphi : x \mapsto -x$ есть автоморфизм $(\mathbb{Z}; =, +)$, но не сохраняет \leq , т.к. $\mathbb{Z} \models 0 \leq 1$, но $\mathbb{Z} \not\models \varphi(0) \leq \varphi(1)$.

Доказательство невыразимости методом автоморфизма

Аutomорфизмом $\varphi : M \rightarrow M$ называется изоморфизм модели на себя.

Пример.

В модели $(\mathbb{Z}; =, +)$ не выразим предикат \leq .

Доказательство.

Отображение $\varphi : x \mapsto -x$ есть автоморфизм $(\mathbb{Z}; =, +)$, но не сохраняет \leq , т.к. $\mathbb{Z} \models 0 \leq 1$, но $\mathbb{Z} \not\models \varphi(0) \leq \varphi(1)$.

Доказательство невыразимости методом автоморфизма

Аutomорфизмом $\varphi : M \rightarrow M$ называется изоморфизм модели на себя.

Пример.

В модели $(\mathbb{Z}; =, +)$ не выразим предикат \leq .

Доказательство.

Отображение $\varphi : x \mapsto -x$ есть автоморфизм $(\mathbb{Z}; =, +)$, но не сохраняет \leq , т.к. $\mathbb{Z} \models 0 \leq 1$, но $\mathbb{Z} \not\models \varphi(0) \leq \varphi(1)$.

Пример.

В модели $(\mathbb{Z}; \leq)$ не выразима функция $+$.

Доказательство.

$\varphi : x \mapsto x + 1$ есть автоморфизм $(\mathbb{Z}; \leq)$, не сохраняющий $+$.

Упражнение

Опишите все автоморфизмы модели $(\mathbb{Z}; \leq)$.

Ответ: все сдвиги $x \mapsto x + k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Пример.

В модели $(\mathbb{Z}; \leq)$ не выразима функция $+$.

Доказательство.

$\varphi : x \mapsto x + 1$ есть автоморфизм $(\mathbb{Z}; \leq)$, не сохраняющий $+$.

Упражнение

Опишите все автоморфизмы модели $(\mathbb{Z}; \leq)$.

Ответ: все сдвиги $x \mapsto x + k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Пример.

В модели $(\mathbb{Z}; \leq)$ не выразима функция $+$.

Доказательство.

$\varphi : x \mapsto x + 1$ есть автоморфизм $(\mathbb{Z}; \leq)$, не сохраняющий $+$.

Упражнение

Опишите все автоморфизмы модели $(\mathbb{Z}; \leq)$.

Ответ: все сдвиги $x \mapsto x + k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Пример.

Автоморфизмами модели $(\mathbb{R}^2; =, B)$ являются все взаимно однозначные аффинные преобразования плоскости.

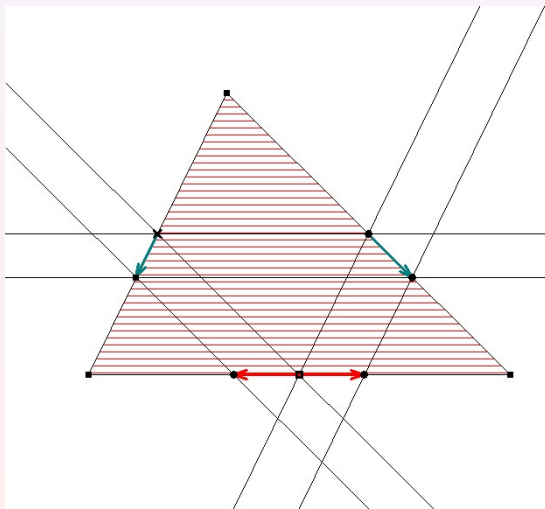
- Всякий автоморфизм переводит отрезки в отрезки.
- Всякий автоморфизм сохраняет параллельность прямых.
- Для любого автоморфизма φ существует аффинное преобразование h такое, что $\varphi \circ h$ сохраняет три различные точки.

Пример.

Аutomорфизмами модели $(\mathbb{R}^2; =, B)$ являются все взаимно однозначные аффинные преобразования плоскости.

- Всякий автоморфизм переводит отрезки в отрезки.
- Всякий автоморфизм сохраняет параллельность прямых.
- Для любого автоморфизма φ существует аффинное преобразование h такое, что $\varphi \circ h$ сохраняет три различные точки.

- Если автоморфизм φ имеет три различные неподвижные точки, то $\varphi = id$.



Следствие.

В модели $(\mathbb{R}^2; =, V)$ не определимы:

- никакая конкретная точка;
- никакая конкретная фигура, за искл. всей плоскости;
- предикат \cong ;
- равенство углов.

Пример.

Автоморфизмы модели $(\mathbb{R}^2; =, V, \cong)$ есть все преобразования плоскости, являющиеся композицией гомотетии и движения.

- Предикаты V и \cong сохраняются при движениях и гомотетиях.
- Аффинное преобразование, сохраняющее длины сторон некоторого треугольника, есть движение.

Пример.

Автоморфизмы модели $(\mathbb{R}^2; =, V, \cong)$ есть все преобразования плоскости, являющиеся композицией гомотетии и движения.

- Предикаты V и \cong сохраняются при движениях и гомотетиях.
- Аффинное преобразование, сохраняющее длины сторон некоторого треугольника, есть движение.

- Любой автоморфизм φ переводит равносторонний треугольник в (подобный ему) равносторонний.
- Для некоторой гомотетии h автоморфизм $\varphi \circ h$ сохраняет длины сторон заданного равностороннего треугольника.
- Значит, $\varphi \circ h$ — движение.

Следствие.

В модели $(\mathbb{R}^2; =, V, \cong)$ не определимы:

- никакая конкретная точка;
- никакая конкретная фигура, за искл. всей плоскости;
- единица длины;
- ориентация;
- направление «вдоль оси x ».

Выполнимость

Опр.

Формула $A(b_1, \dots, b_n)$ сигнатуры Σ *выполнима в модели* $(M; \Sigma)$, если для некоторых констант $c_1, \dots, c_n \in M$ предложение $A[b_1/\underline{c}_1, \dots, b_n/\underline{c}_n]$ (сигнатуры $\Sigma(M)$) истинно.

Формула A сигнатуры Σ *выполнима*, если она выполнима в некоторой модели $(M; \Sigma)$.

Выполнимость

Опр.

Формула $A(b_1, \dots, b_n)$ сигнатуры Σ *выполнима в модели* $(M; \Sigma)$, если для некоторых констант $c_1, \dots, c_n \in M$ предложение $A[b_1/\underline{c}_1, \dots, b_n/\underline{c}_n]$ (сигнатуры $\Sigma(M)$) истинно.

Формула A сигнатуры Σ *выполнима*, если она выполнима в некоторой модели $(M; \Sigma)$.

Утверждение.

$A(b_1, \dots, b_n)$ выполнима в $M \iff$
 $M \models \exists x_1 \dots \exists x_n A(x_1, \dots, x_n)$.

Соглашение: $A(b_1, \dots, b_n)$ означает, что фиксирован список переменных b_1, \dots, b_n , содержащий все свободные переменные A . Тогда вместо $A[b_1/x_1, \dots, b_n/x_n]$ пишут $A(x_1, \dots, x_n)$.

Утверждение.

$A(b_1, \dots, b_n)$ выполнима в $M \iff$
 $M \models \exists x_1 \dots \exists x_n A(x_1, \dots, x_n)$.

Соглашение: $A(b_1, \dots, b_n)$ означает, что фиксирован список переменных b_1, \dots, b_n , содержащий все свободные переменные A . Тогда вместо $A[b_1/x_1, \dots, b_n/x_n]$ пишут $A(x_1, \dots, x_n)$.

Опр.

Если $f : \text{FrVar} \rightarrow \text{Tm}_\Sigma$ подстановка, то $f(A)$ означает результат применения f к формуле A .

Оценкой на M называем любую подстановку вместо свободных переменных констант сигнатуры $\Sigma(M)$, т.е. функцию $f : \text{FrVar} \rightarrow \text{Const}_{\Sigma(M)}$.

Выполнимость множества формул

Опр.

Множество формул Γ сигнатуры Σ **выполнимо в модели M** , если существует оценка f на M такая, что для любой $A \in \Gamma$ $M \models f(A)$.

Такую f называем *выполняющей оценкой* для Γ .
Множество формул Γ *выполнимо*, если Γ выполнимо в некоторой модели.

Выполнимость множества формул

Опр.

Множество формул Γ сигнатуры Σ **выполнимо в модели M** , если существует оценка f на M такая, что для любой $A \in \Gamma$ $M \models f(A)$.

Такую f называем **выполняющей оценкой** для Γ .
Множество формул Γ **выполнимо**, если Γ выполнимо в некоторой модели.

Общезначимость

Опр.

Формула A *общезначима* (тождественно истинна), если $\neg A$ не выполнима. Формула A *тождественно ложна*, если A не выполнима.

Пример.

Формулы $P(a) \vee \neg P(a)$,
 $\exists x \forall y Q(x, y) \rightarrow \forall y \exists x Q(x, y)$ общезначимы.
Формула $P(a_0) \rightarrow P(a_1)$ выполнима, но не общезначима.

Общезначимость

Опр.

Формула A *общезначима* (тождественно истинна), если $\neg A$ не выполнима. Формула A *тождественно ложна*, если A не выполнима.

Пример.

Формулы $P(a) \vee \neg P(a)$,
 $\exists x \forall y Q(x, y) \rightarrow \forall y \exists x Q(x, y)$ общезначимы.
Формула $P(a_0) \rightarrow P(a_1)$ выполнима, но не общезначима.

Логическое следование

Пусть $\Gamma \subseteq \text{Fm}_\Sigma$ и $A \in \text{Fm}_\Sigma$.

Опр.

Формула A *логически* (или *семантически*) *следует из* Γ , если для любой модели $(M; \Sigma)$ имеем $M \models f(A)$ для любой выполняющей оценки f для множества Γ .

Обозначение: $\Gamma \models A$.

Пример.

$$\{P(a) \rightarrow Q(b), P(a)\} \models P(a) \wedge \exists x Q(x).$$

Пример.

$$P(a) \not\models \forall x P(x).$$

Предложение.

- 1 A — общезначима $\iff \emptyset \vDash A$.
- 2 Γ выполнимо $\iff \Gamma \not\vdash \perp$.
- 3 $\Gamma \vDash A \iff \Gamma \cup \{\neg A\}$ не выполнимо.

Предложение.

$\{B_1, \dots, B_n\} \vDash A \iff$
 $(\bigwedge_{i=1}^n B_i) \rightarrow A$ общезначима.

Предложение.

- 1 A — общезначима $\iff \emptyset \vDash A$.
- 2 Γ выполнимо $\iff \Gamma \not\vdash \perp$.
- 3 $\Gamma \vDash A \iff \Gamma \cup \{\neg A\}$ не выполнимо.

Предложение.

$\{B_1, \dots, B_n\} \vDash A \iff$
 $(\bigwedge_{i=1}^n B_i) \rightarrow A$ общезначима.

Эквивалентность формул

Опр.

Формулы A и B сигнатуры Σ равносильны (обозначение $A \equiv B$), если для любой модели $(M; \Sigma)$ и оценки f на M

$$M \models f(A) \iff M \models f(B).$$

Пусть b_1, \dots, b_n содержит все св. пер. A, B .

Утверждение.

$A \equiv B$, если и только если для любой модели M $A_M = B_M$ (для данного набора переменных).

Эквивалентность формул

Опр.

Формулы A и B сигнатуры Σ равносильны (обозначение $A \equiv B$), если для любой модели $(M; \Sigma)$ и оценки f на M

$$M \models f(A) \iff M \models f(B).$$

Пусть b_1, \dots, b_n содержит все св. пер. A, B .

Утверждение.

$A \equiv B$, если и только если для любой модели M $A_M = B_M$ (для данного набора переменных).

Утверждение.

- 1 Отношение \equiv рефлексивно, симметрично и транзитивно.
- 2 $A \equiv B$, если и только если формула $A \leftrightarrow B$ общезначима.
- 3 Формула A общезначима тогда и только тогда, когда $A \equiv \top$.

Основные равносильности с кванторами

Если формулы A, B не содержат связанных переменных x, y , то:

$$\forall x A[a/x] \equiv \forall y A[a/y]$$

$$\exists x A[a/x] \equiv \exists y A[a/y]$$

$$(\forall x A[a/x] \vee B) \equiv \forall x (A[a/x] \vee B)$$

$$(\exists x A[a/x] \vee B) \equiv \exists x (A[a/x] \vee B)$$

$$(\forall x A[a/x] \wedge B) \equiv \forall x (A[a/x] \wedge B)$$

$$(\exists x A[a/x] \wedge B) \equiv \exists x (A[a/x] \wedge B)$$

$$\neg \forall x A[a/x] \equiv \exists x \neg A[a/x]$$

$$\neg \exists x A[a/x] \equiv \forall x \neg A[a/x]$$

Основные равносильности с кванторами

Если формулы A, B не содержат связанных переменных x, y , то:

$$\forall x A[a/x] \equiv \forall y A[a/y]$$

$$\exists x A[a/x] \equiv \exists y A[a/y]$$

$$(\forall x A[a/x] \vee B) \equiv \forall x (A[a/x] \vee B)$$

$$(\exists x A[a/x] \vee B) \equiv \exists x (A[a/x] \vee B)$$

$$(\forall x A[a/x] \wedge B) \equiv \forall x (A[a/x] \wedge B)$$

$$(\exists x A[a/x] \wedge B) \equiv \exists x (A[a/x] \wedge B)$$

$$\neg \forall x A[a/x] \equiv \exists x \neg A[a/x]$$

$$\neg \exists x A[a/x] \equiv \forall x \neg A[a/x]$$

Основные равносильности с кванторами

Если формулы A, B не содержат связанных переменных x, y , то:

$$\begin{aligned}\forall x A[a/x] &\equiv \forall y A[a/y] \\ \exists x A[a/x] &\equiv \exists y A[a/y] \\ (\forall x A[a/x] \vee B) &\equiv \forall x (A[a/x] \vee B) \\ (\exists x A[a/x] \vee B) &\equiv \exists x (A[a/x] \vee B) \\ (\forall x A[a/x] \wedge B) &\equiv \forall x (A[a/x] \wedge B) \\ (\exists x A[a/x] \wedge B) &\equiv \exists x (A[a/x] \wedge B) \\ \neg \forall x A[a/x] &\equiv \exists x \neg A[a/x] \\ \neg \exists x A[a/x] &\equiv \forall x \neg A[a/x]\end{aligned}$$

Основные равносильности с кванторами

Если формулы A, B не содержат связанных переменных x, y , то:

$$\begin{aligned}\forall x A[a/x] &\equiv \forall y A[a/y] \\ \exists x A[a/x] &\equiv \exists y A[a/y] \\ (\forall x A[a/x] \vee B) &\equiv \forall x (A[a/x] \vee B) \\ (\exists x A[a/x] \vee B) &\equiv \exists x (A[a/x] \vee B) \\ (\forall x A[a/x] \wedge B) &\equiv \forall x (A[a/x] \wedge B) \\ (\exists x A[a/x] \wedge B) &\equiv \exists x (A[a/x] \wedge B) \\ \neg \forall x A[a/x] &\equiv \exists x \neg A[a/x] \\ \neg \exists x A[a/x] &\equiv \forall x \neg A[a/x]\end{aligned}$$

Основные равносильности с кванторами

Если формулы A, B не содержат связанных переменных x, y , то:

$$\begin{aligned}\forall x A[a/x] &\equiv \forall y A[a/y] \\ \exists x A[a/x] &\equiv \exists y A[a/y] \\ (\forall x A[a/x] \vee B) &\equiv \forall x (A[a/x] \vee B) \\ (\exists x A[a/x] \vee B) &\equiv \exists x (A[a/x] \vee B) \\ (\forall x A[a/x] \wedge B) &\equiv \forall x (A[a/x] \wedge B) \\ (\exists x A[a/x] \wedge B) &\equiv \exists x (A[a/x] \wedge B) \\ \neg \forall x A[a/x] &\equiv \exists x \neg A[a/x] \\ \neg \exists x A[a/x] &\equiv \forall x \neg A[a/x]\end{aligned}$$

Основные равносильности с кванторами

Если формулы A, B не содержат связанных переменных x, y , то:

$$\begin{aligned}\forall x A[a/x] &\equiv \forall y A[a/y] \\ \exists x A[a/x] &\equiv \exists y A[a/y] \\ (\forall x A[a/x] \vee B) &\equiv \forall x (A[a/x] \vee B) \\ (\exists x A[a/x] \vee B) &\equiv \exists x (A[a/x] \vee B) \\ (\forall x A[a/x] \wedge B) &\equiv \forall x (A[a/x] \wedge B) \\ (\exists x A[a/x] \wedge B) &\equiv \exists x (A[a/x] \wedge B) \\ \neg \forall x A[a/x] &\equiv \exists x \neg A[a/x] \\ \neg \exists x A[a/x] &\equiv \forall x \neg A[a/x]\end{aligned}$$

Основные равносильности с кванторами

Если формулы A, B не содержат связанных переменных x, y , то:

$$\begin{aligned}\forall x A[a/x] &\equiv \forall y A[a/y] \\ \exists x A[a/x] &\equiv \exists y A[a/y] \\ (\forall x A[a/x] \vee B) &\equiv \forall x (A[a/x] \vee B) \\ (\exists x A[a/x] \vee B) &\equiv \exists x (A[a/x] \vee B) \\ (\forall x A[a/x] \wedge B) &\equiv \forall x (A[a/x] \wedge B) \\ (\exists x A[a/x] \wedge B) &\equiv \exists x (A[a/x] \wedge B) \\ \neg \forall x A[a/x] &\equiv \exists x \neg A[a/x] \\ \neg \exists x A[a/x] &\equiv \forall x \neg A[a/x]\end{aligned}$$

Основные равносильности с кванторами

Если формулы A, B не содержат связанных переменных x, y , то:

$$\begin{aligned}\forall x A[a/x] &\equiv \forall y A[a/y] \\ \exists x A[a/x] &\equiv \exists y A[a/y] \\ (\forall x A[a/x] \vee B) &\equiv \forall x (A[a/x] \vee B) \\ (\exists x A[a/x] \vee B) &\equiv \exists x (A[a/x] \vee B) \\ (\forall x A[a/x] \wedge B) &\equiv \forall x (A[a/x] \wedge B) \\ (\exists x A[a/x] \wedge B) &\equiv \exists x (A[a/x] \wedge B) \\ \neg \forall x A[a/x] &\equiv \exists x \neg A[a/x] \\ \neg \exists x A[a/x] &\equiv \forall x \neg A[a/x]\end{aligned}$$

Расширение языка пропозициональными переменными

- Обогатим язык логики первого порядка пропозициональными переменными. Можно считать переменную P нульместным предикатным символом.
- Распространим на расширенный язык все синтаксические понятия, включая понятие формулы.
- Пропозициональные переменные считаются атомарными формулами.

Подстановка

Опр.

$C[P/A]$ означает результат замены всех вхождений P в формулу C на формулу A .

Замечание.

$C[P/A]$ не всегда является формулой. Если $C = \forall x (Q(x) \wedge P)$ и $A = \exists x R(x)$, то

$$C[P/A] = \forall x (Q(x) \wedge \exists x R(x)) .$$

Подстановка

Опр.

$C[P/A]$ означает результат замены всех вхождений P в формулу C на формулу A .

Замечание.

$C[P/A]$ не всегда является формулой. Если $C = \forall x (Q(x) \wedge P)$ и $A = \exists x R(x)$, то

$$C[P/A] = \forall x (Q(x) \wedge \exists x R(x)) .$$

Лемма.

$C[P/A]$ — формула, если и только если любое вхождение P в формулу C не находится в области действия квантора по переменной $x \in \text{BdVar}$, входящей в A .

Опр.

Говорим, что *разрешена подстановка формулы A вместо P в C* , если выполнено условие предыдущей леммы.

Лемма.

$C[P/A]$ — формула, если и только если любое вхождение P в формулу C не находится в области действия квантора по переменной $x \in \text{BdVar}$, входящей в A .

Опр.

Говорим, что *разрешена подстановка формулы A вместо P в C* , если выполнено условие предыдущей леммы.

Лемма.

1 Если $A \equiv B$, то $\neg A \equiv \neg B$.

Если $A_1 \equiv B_1$ и $A_2 \equiv B_2$, то

$A_1 \wedge A_2 \equiv B_1 \wedge B_2$, $A_1 \vee A_2 \equiv B_1 \vee B_2$,

$A_1 \rightarrow A_2 \equiv B_1 \rightarrow B_2$.

2 Если $A \equiv B$ и $x \in \text{BdVar}$ не входит в A, B , то
 $\forall x A[a/x] \equiv \forall x B[a/x]$ и $\exists x A[a/x] \equiv \exists x B[a/x]$.

Лемма.

- 1 Если $A \equiv B$, то $\neg A \equiv \neg B$.
Если $A_1 \equiv B_1$ и $A_2 \equiv B_2$, то
 $A_1 \wedge A_2 \equiv B_1 \wedge B_2$, $A_1 \vee A_2 \equiv B_1 \vee B_2$,
 $A_1 \rightarrow A_2 \equiv B_1 \rightarrow B_2$.
- 2 Если $A \equiv B$ и $x \in \text{BdVar}$ не входит в A, B , то
 $\forall x A[a/x] \equiv \forall x B[a/x]$ и $\exists x A[a/x] \equiv \exists x B[a/x]$.

Замена подформулы на эквивалентную

Теорема.

Если $A \equiv B$ и разрешена подстановка формул A, B вместо P в C , то $C[P/A] \equiv C[P/B]$.

Доказательство.

Индукция по построению формулы C на основе предыдущей леммы. Рассмотрим лишь случай $C = \forall x D[a/x]$.

Замена подформулы на эквивалентную

Теорема.

Если $A \equiv B$ и разрешена подстановка формул A, B вместо P в C , то $C[P/A] \equiv C[P/B]$.

Доказательство.

Индукция по построению формулы C на основе предыдущей леммы. Рассмотрим лишь случай $C = \forall x D[a/x]$.

- Поскольку $C = \forall x D[a/a'] [a'/x]$, можно считать, что a не входит в A, B .
- По предположению индукции $D[P/A] \equiv D[P/B]$.
- В силу подставимости формул A, B в C , x не входит в A, B . Отсюда

$$\forall x D[P/A][a/x] \equiv \forall x D[P/B][a/x].$$

- Поскольку $C = \forall x D[a/a'] [a'/x]$, можно считать, что a не входит в A, B .
- По предположению индукции $D[P/A] \equiv D[P/B]$.
- В силу подставимости формул A, B в C , x не входит в A, B . Отсюда

$$\forall x D[P/A][a/x] \equiv \forall x D[P/B][a/x].$$

- Поскольку $C = \forall x D[a/a'] [a'/x]$, можно считать, что a не входит в A, B .
- По предположению индукции $D[P/A] \equiv D[P/B]$.
- В силу подставимости формул A, B в C , x не входит в A, B . Отсюда

$$\forall x D[P/A][a/x] \equiv \forall x D[P/B][a/x].$$

- Поскольку a не входит в A, B
 $D[P/A][a/x] = D[a/x][P/A]$.
- Отсюда

$$\begin{aligned} (\forall x D[a/x])[P/A] &= (\forall x D[P/A][a/x]) \\ \equiv (\forall x D[P/B][a/x]) &= (\forall x D[a/x])[P/B]. \end{aligned}$$

- Поскольку a не входит в A, B

$$D[P/A][a/x] = D[a/x][P/A].$$

- Отсюда

$$\begin{aligned} (\forall x D[a/x])[P/A] &= (\forall x D[P/A][a/x]) \\ \equiv (\forall x D[P/B][a/x]) &= (\forall x D[a/x])[P/B]. \end{aligned}$$

Замена связанной переменной

Лемма.

Пусть $y \in \text{BdVar}$ не входит в формулу B . Тогда $B[x/y]$ есть формула и $B[x/y] \equiv B$.

Доказательство.

Применяем индукцию по числу вхождений кванторов по переменной x в B . Каждая подформула $\forall x C[a/x]$ или $\exists x C[a/x]$ заменяется на эквивалентную $\forall y C[a/y]$ или $\exists y C[a/y]$.

Замена связанной переменной

Лемма.

Пусть $y \in \text{BdVar}$ не входит в формулу B . Тогда $B[x/y]$ есть формула и $B[x/y] \equiv B$.

Доказательство.

Применяем индукцию по числу вхождений кванторов по переменной x в B . Каждая подформула $\forall x C[a/x]$ или $\exists x C[a/x]$ заменяется на эквивалентную $\forall y C[a/y]$ или $\exists y C[a/y]$.

Семантика расширенного языка

- Пропозициональная переменная P в модели M интерпретируется как логическая константа, то есть $P_M \in \mathbb{B}$.
- Считается $M \models P_M$, если $P_M = \text{И}$ и $M \not\models P_M$, если $P_M = \text{Л}$.
- Понятие общезначимой формулы распространяется на формулы расширенного языка.

Теорема о подстановке

Теорема.

Пусть формула A общезначима и разрешена подстановка формулы C вместо P в A , тогда общезначима формула $A[P/C]$.

Доказательство.

- Допустим, $M \not\models f(A[P/C])$ при некоторой оценке f .
- Расширим M до модели (M, P) сигнатуры с переменной P : $P_M = \mathbb{I} \iff M \models f(C)$.

Теорема о подстановке

Теорема.

Пусть формула A общезначима и разрешена подстановка формулы C вместо P в A , тогда общезначима формула $A[P/C]$.

Доказательство.

- Допустим, $M \not\models f(A[P/C])$ при некоторой оценке f .
- Расширим M до модели (M, P) сигнатуры с переменной P : $P_M = \mathbb{I} \iff M \models f(C)$.

- Индукцией по построению формулы B проверим, что

$$(M, P) \models B \iff M \models B[P/C]$$

для любой формулы B , в которую разрешена подстановка C вместо P .

- Отсюда получаем $(M, P) \not\models A$.

Предварённая нормальная форма

Опр.

Формула A называется *предварённой*, если A имеет вид $Qx_1Qx_2 \dots Qx_nA_0[b_1/x_1, \dots, b_n/x_n]$, где Q означает квантор \forall или \exists , а формула A_0 бескванторная.

Теорема.

Для каждой формулы A можно указать эквивалентную ей предварённую формулу A' от тех же свободных переменных.

Предварённая нормальная форма

Опр.

Формула A называется *предварённой*, если A имеет вид $Qx_1Qx_2 \dots Qx_nA_0[b_1/x_1, \dots, b_n/x_n]$, где Q означает квантор \forall или \exists , а формула A_0 бескванторная.

Теорема.

Для каждой формулы A можно указать эквивалентную ей предварённую формулу A' от тех же свободных переменных.

Доказательство.

Применяя основные эквивалентности с кванторами постепенно выносим все кванторы наружу. Переименовываем связанные переменные там, где это необходимо.

$$(\forall x A[a/x] \vee B) \equiv \forall x (A[a/x] \vee B)$$

$$(\exists x A[a/x] \vee B) \equiv \exists x (A[a/x] \vee B)$$

$$(\forall x A[a/x] \wedge B) \equiv \forall x (A[a/x] \wedge B)$$

$$(\exists x A[a/x] \wedge B) \equiv \exists x (A[a/x] \wedge B)$$

$$\neg \forall x A[a/x] \equiv \exists x \neg A[a/x]$$

$$\neg \exists x A[a/x] \equiv \forall x \neg A[a/x]$$

Доказательство.

Применяя основные эквивалентности с кванторами постепенно выносим все кванторы наружу. Переименовываем связанные переменные там, где это необходимо.

$$\begin{aligned}(\forall x A[a/x] \vee B) &\equiv \forall x (A[a/x] \vee B) \\(\exists x A[a/x] \vee B) &\equiv \exists x (A[a/x] \vee B) \\(\forall x A[a/x] \wedge B) &\equiv \forall x (A[a/x] \wedge B) \\(\exists x A[a/x] \wedge B) &\equiv \exists x (A[a/x] \wedge B) \\ \neg \forall x A[a/x] &\equiv \exists x \neg A[a/x] \\ \neg \exists x A[a/x] &\equiv \forall x \neg A[a/x]\end{aligned}$$

Пример.

$$\begin{aligned}\forall x P(x) \wedge \neg \forall x Q(x, a) &\equiv \\ \forall x P(x) \wedge \exists x \neg Q(x, a) &\equiv \\ \forall x P(x) \wedge \exists y \neg Q(y, a) &\equiv \\ \forall x (P(x) \wedge \exists y \neg Q(y, a)) &\equiv \\ \forall x \exists y (P(x) \wedge \neg Q(y, a)). &\end{aligned}$$

Замечание.

Кванторы могут быть вынесены наружу в различном порядке, поэтому предварённая форма данной формулы не единственна.

Пример.

$$\begin{aligned}\forall x P(x) \wedge \neg \forall x Q(x, a) & \equiv \\ \forall x P(x) \wedge \exists x \neg Q(x, a) & \equiv \\ \forall x P(x) \wedge \exists y \neg Q(y, a) & \equiv \\ \forall x (P(x) \wedge \exists y \neg Q(y, a)) & \equiv \\ \forall x \exists y (P(x) \wedge \neg Q(y, a)). & \end{aligned}$$

Замечание.

Кванторы могут быть вынесены наружу в различном порядке, поэтому предварённая форма данной формулы не единственна.

Пример.

$$\begin{aligned}\forall x P(x) \wedge \neg \forall x Q(x, a) &\equiv \\ \forall x P(x) \wedge \exists x \neg Q(x, a) &\equiv \\ \forall x P(x) \wedge \exists y \neg Q(y, a) &\equiv \\ \forall x (P(x) \wedge \exists y \neg Q(y, a)) &\equiv \\ \forall x \exists y (P(x) \wedge \neg Q(y, a)). &\end{aligned}$$

Замечание.

Кванторы могут быть вынесены наружу в различном порядке, поэтому предварённая форма данной формулы не единственна.

Пример.

$$\begin{aligned}\forall x P(x) \wedge \neg \forall x Q(x, a) & \equiv \\ \forall x P(x) \wedge \exists x \neg Q(x, a) & \equiv \\ \forall x P(x) \wedge \exists y \neg Q(y, a) & \equiv \\ \forall x (P(x) \wedge \exists y \neg Q(y, a)) & \equiv \\ \forall x \exists y (P(x) \wedge \neg Q(y, a)). & \equiv\end{aligned}$$

Замечание.

Кванторы могут быть вынесены наружу в различном порядке, поэтому предварённая форма данной формулы не единственна.

Пример.

$$\begin{aligned}\forall x P(x) \wedge \neg \forall x Q(x, a) & \equiv \\ \forall x P(x) \wedge \exists x \neg Q(x, a) & \equiv \\ \forall x P(x) \wedge \exists y \neg Q(y, a) & \equiv \\ \forall x (P(x) \wedge \exists y \neg Q(y, a)) & \equiv \\ \forall x \exists y (P(x) \wedge \neg Q(y, a)). & \end{aligned}$$

Замечание.

Кванторы могут быть вынесены наружу в различном порядке, поэтому предварённая форма данной формулы не единственна.

Пример.

$$\begin{aligned}\forall x P(x) \wedge \neg \forall x Q(x, a) & \equiv \\ \forall x P(x) \wedge \exists x \neg Q(x, a) & \equiv \\ \forall x P(x) \wedge \exists y \neg Q(y, a) & \equiv \\ \forall x (P(x) \wedge \exists y \neg Q(y, a)) & \equiv \\ \forall x \exists y (P(x) \wedge \neg Q(y, a)). & \end{aligned}$$

Замечание.

Кванторы могут быть вынесены наружу в различном порядке, поэтому предварённая форма данной формулы не единственна.