Введение в математическую логику
Мех-мат МГУ, 1-й курс, весна 2008 г.
Конспект лекции 8

Л.Д. Беклемишев*

5.4 Элементарная эквивалентность

Пусть St_Σ — множество предложений сигнатуры Σ

Определение 5.9. *Элементарная теория модели* M есть множество $Th(M) \rightleftharpoons \{A \in \mathrm{St}_\Sigma : M \vDash A\}$.

Определение 5.10. Модели M и N сигнатуры Σ *элементарно эквивалентны* ($M \equiv N$), если в M и в N истинны одни и те же предложения Σ, т.е. если $Th(M) \equiv Th(N)$.

Утверждение 5.11. *$M \cong N$ влечёт $M \equiv N$. Обратное, вообще говоря, неверно.*

5.5 Подмодели

Определение 5.12. $(N;\Sigma)$ есть *подмодель* модели $(M;\Sigma)$, если $N \subseteq M$ и для всех $P \in \mathrm{Pred}_\Sigma$, $f \in \mathrm{Func}_\Sigma$, $c \in \mathrm{Const}_\Sigma$ имеем $P_N = P_M \restriction N$, $c_M \in N$, N замкнуто относительно f_M и $f_N = f_M \restriction N$.

Пример 5.13. Если $(G; =, \cdot, 1, (\cdot)^{-1})$ — группа, то подмодели G суть подгруппы группы G. Если же G рассматривается как модель $(G; =, \cdot, 1)$, то её подмоделями будут подполугруппы с единицей группы G.

---

*Данный конспект лекций составлен с использованием лекционных материалов ряда сотрудников кафедры математической логики и теории алгоритмов МГУ, в частности конспекта лекций профессора М.Р. Пентуса (2006 г.), на основе программы, разработанной коллективом кафедры.

5.6 Элементарные подмодели

Определение 5.14. Подмодель $(N;\Sigma)$ модели $(M;\Sigma)$ *элементарна* (обозначение $N \preccurlyeq M$), если для всех $A \in \mathrm{Fm}_\Sigma$

$$\forall \vec{x} \in N\ (N \vDash A[\vec{x}] \iff M \vDash A[\vec{x}]).$$

Утверждение 5.15. *$N \preccurlyeq M$ влечёт $N \equiv M$.*

Пример 5.16. Если M — модель $Th(\mathbb{N})$, то $\mathbb{N} \preccurlyeq M$.

Доказательство. Вложение $\varphi : \mathbb{N} \to M$ действует по формуле $\varphi(n) \rightleftharpoons (\overline{n})_M$. Докажем, что $\varphi(\mathbb{N})$ есть подмодель M.

Ясно, что подмножество $\varphi(\mathbb{N}) \subseteq M$ замкнуто относительно функции S_M и $S_M(\varphi(n)) = \varphi(S_\mathbb{N}(n))$. Рассмотрим теперь функцию сложения $+$. Надо установить, что $\varphi(\mathbb{N})$ замкнуто относительно $+_M$ и

$$\varphi(n) +_M \varphi(m) = \varphi(n+m).$$

Это вытекает из равенства $\overline{n} + \overline{m} = \overline{n+m}$, которое является истинным в $\mathbb{N}$ и потому входит в $Th(\mathbb{N})$. Функция умножения рассматривается аналогично.

Элементарность вложения следует из цепочки эквивалентностей, верной для любых $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{N} \vDash A[n_1,\ldots,n_k] &\iff \mathbb{N} \vDash A(\overline{n_1},\ldots,\overline{n_k}) \\ &\iff M \vDash A(\overline{n_1},\ldots,\overline{n_k}) \iff M \vDash A[n_1,\ldots,n_k]. \end{aligned}$$

Вторая эквивалентность следует из $M \vDash Th(\mathbb{N})$. ⊠

5.7 Теорема Лёвенгейма–Сколема

Пусть Σ — счётная сигнатура.

Теорема 5.17. *Всякая модель $(M;\Sigma)$ имеет (конечную или) счётную элементарную подмодель.*

Доказательство. Построим последовательность счётных подмножеств модели M

$$N_0 \subseteq N_1 \subseteq N_2 \subseteq \ldots$$

следующим образом:

- N_0 — любое непустое счётное подмножество M.
- Для каждой формулы $A[a,\vec{b}]$ и набора $\vec{y} \in N_k$, если $M \vDash \exists v A[v,\vec{y}]$ выберем $x \in M$ такой, что $M \vDash A[x,\vec{y}]$. Добавим все такие x к N_k и получим N_{k+1}.

Положим $N \rightleftharpoons \bigcup_{k \geq 0} N_k$. По построению множества N получаем следующее свойство.

Лемма 5.18. *Для любой формулы A и всех $\vec{y} \in N$*

$$M \vDash \exists v A[v,\vec{y}] \iff \exists x \in N \quad M \vDash A[x,\vec{y}].$$

Лемма 5.19. *N есть подмодель M.*

Доказательство. Пусть $\vec{x} \in N$, $f \in \mathrm{Func}_\Sigma$. Поскольку $M \vDash \exists v\, f(\vec{x}) = v$, имеем $y \in N$ такой, что $M \vDash f(\vec{x}) = y$, т.е. $f_M(\vec{x}) \in N$. ⊠

Индукцией по построению A теперь покажем

$$\forall \vec{y} \in N\ (N \vDash A[\vec{y}] \iff M \vDash A[\vec{y}]).$$

- Для атомарных формул A следует из того, что N — подмодель M.
- Для $A = \neg B,\ B \wedge C,\ B \vee C$ вытекает из предположения индукции.
- Допустим $A = \exists v B[a/v]$. Тогда

$$\begin{aligned} M \vDash \exists v B[a/v,\vec{y}] &\iff \exists x \in N \quad M \vDash B[x,\vec{y}] \\ &\iff \exists x \in N \quad N \vDash B[x,\vec{y}] \iff N \vDash \exists v B[a/v,\vec{y}]. \end{aligned}$$

⊠

Следствие 5.20. *Всякая непротиворечивая теория в счётной сигнатуре имеет (конечную или) счётную модель.*

Следствие 5.21. (i) *Существуют счётные модели $Th(\mathbb{R})$ и $Th(\mathbb{C})$.*

(ii) *Существует счётная модель элементарной геометрии.*

(iii) *Если теория множеств ZFC непротиворечива, то существует и счётная модель ZFC.*

Следующее утверждение, несколько обобщающее предыдущую теорему, иногда называют теоремой Лёвенгейма–Сколема о понижении мощности.[1]

Теорема 5.22. *Пусть $(M;\Sigma)$ — бесконечная модель в счётной сигнатуре и $\lambda \leq |M|$ — бесконечная мощность. Тогда найдётся подмодель $N \preccurlyeq M$ такая, что $|N| = \lambda$.*

Доказательство. Та же конструкция, но начинаем с любого подмножества $N_0 \subseteq M$ мощности λ. Поскольку сигнатура счётна, нетрудно показать по индукции, что все множества N_k, так же как и их объединение N, имеют мощность λ. ⊠

5.8 Теорема Лёвенгейма–Сколема о повышении мощности

Пусть Σ — счётная сигнатура.

Теорема 5.23. *Для любой бесконечной модели $(M;\Sigma)$ и мощности $\lambda \geq |M|$ найдётся модель $(N;\Sigma)$ такая, что $M \preccurlyeq N$ и $|N| = \lambda$.*

Доказательство. Возьмём $X \supseteq M$, $|X| = \lambda$. Рассмотрим сигнатуру $\Sigma_X \rightleftharpoons \Sigma \cup \{\underline{c} : c \in X\}$ и теорию

$$T := Th(M;\Sigma_X) \cup \{\underline{c} \neq \underline{d} : c, d \in X, c \neq d\}.$$

Каждая конечное подмножество теории T совместно. По теореме о компактности T имеет нормальную модель N. Но функция $\varphi : c \longmapsto (\underline{c})_N$ инъективна в силу аксиом T, следовательно $|N| \geq |X| = \lambda$. Т.к. $N \vDash Th(M;\Sigma_X)$, то $\varphi(M)$ есть подмодель N изоморфная M и $\varphi(M) \preccurlyeq N$. Это рассуждение совершенно аналогично уже разобранному нами более детально примеру 5.16. ⊠

Следствие 5.24. *Если теория T имеет бесконечную модель, то T имеет модели любой бесконечной мощности.*

Следствие 5.25. *Множество $Th(\mathbb{N})$ всех предложений, истинных в стандартной модели арифметики, имеет модели любой бесконечной мощности.*

[1] Это предложение предполагает знакомство с понятием мощности множества и не входит в обязательную программу.

5.9 Полные теории

Определение 5.26. Теория T *полна*, если

- T непротиворечива;
- Для любого предложения A в языке T
  $T \vdash A$ или $T \vdash \neg A$.

Предложение 5.27. *Для любой модели M теория $Th(M)$ полна.*

Доказательство. Действительно, $Th(M)$ непротиворечива, поскольку имеет модель M. Так как любое предложение A либо истинно, либо ложно в M, получаем, что $A \in Th(M)$ или $\neg A \in Th(M)$. ⊠

Предложение 5.28. *Если T полна и $M \vDash T$, то $T \equiv Th(M)$.*

Доказательство. Условие $T \equiv Th(M)$ означает, что множество теорем T совпадает с $Th(M)$. Поскольку $M \vDash T$ имеем $Th(M) \vdash T$. Если $A \in Th(M)$ и $T \nvdash A$, то в силу полноты $T \vdash \neg A$. Отсюда $M \vDash \neg A$ и $M \nvDash A$, что противоречит $A \in Th(M)$. ⊠

Теорема 5.29 (Линденбаум). *Всякая непротиворечивая теория имеет полное расширение.*

Эта теорема доказывается совершенно аналогично теореме Линденбаума для логики высказываний.

5.10 Аксиоматизируемость

Определение 5.30. Теория T *эффективно аксиоматизируема*, если существует алгоритм, распознающий аксиомы T.

Замечание 5.31. В следующей главе мы дадим точное понятие алгоритма. Сейчас мы пользуемся неформальным представлением об алгоритмах.

Определение 5.32. Теория T *разрешима*, если существует алгоритм, распознающий теоремы T.

Теорема 5.33. *Если T полна и эффективно аксиоматизируема, то T разрешима.*

Доказательство. Пусть дано предложение A. Перебираем все возможные выводы в T до тех пор, пока не встретим доказательство A или доказательство $\neg A$. Полнота гарантирует, что одно из этих двух событий произойдёт. ⊠

5.11 Примеры полных эффективно аксиоматизируемых теорий

Элементарная геометрия. Для случая размерности два эта теория задаётся аксиомами Тарского (G1–G11) и эквивалентна $Th(\mathbb{R}^2; =, \cong, B)$.

Теория ACF_0 *алгебраически замкнутых полей характеристики* 0. Эта теория эквивалентна $Th(\mathbb{C}; =, +, \cdot, 0, 1)$ и задаётся обычными аксиомами поля вместе с двумя бесконечными сериями аксиом:

C_p: $0 \neq (1 + 1 + \cdots + 1)$ (p раз), для каждого простого p.

A_n: $\forall y_0 \ldots y_{n-1} \exists x\, (y_0 + y_1 x + \ldots y_{n-1} x^{n-1} + x^n = 0)$, для каждого $n \geq 1$.

Первая серия аксиом выражает тот факт, что характеристика поля равна нулю. Вторая серия аксиом выражает алгебраическую замкнутость.

Теория RCF *вещественно замкнутых упорядоченных полей.* Эта теория эквивалентна $Th(\mathbb{R}; =, \leq, +, \cdot, 0, 1)$ и задаётся аксиомами поля, аксиомами линейного порядка для отношения $\leq$, а также следующими формулами:

1. $\forall x, y, z\, (x \leq y \wedge 0 \leq z \to xz \leq yz)$;
2. $\forall x, y, z\, (x \leq y \to x + z \leq y + z)$;
3. $\forall x \exists y\, (0 \leq x \to y^2 = x)$;
4. A_n, для каждого нечётного $n \in \mathbb{N}$.

Как и выше, аксиома A_n выражает тот факт, что произвольный полином степени n над данным полем имеет корень.

Теория DLO *плотных линейных порядков без первого и последнего элементов.* Эта теория эквивалентна $Th(\mathbb{Q}; =, <)$ и задаётся аксиомами линейного порядка вместе с двумя дополнительными аксиомами:

1. $\forall x, y\, (x < y \to \exists z\, (x < z \wedge z < y))$;
2. $\forall x \exists y, z\, (z < x \wedge x < y)$.

5.12 Примеры неполных теорий

Примеры неполных теорий легко получить, удаляя аксиомы из известных теорий (не меняя при этом сигнатуры).

Пример 5.34. Рассмотрим сигнатуру с бинарными предикатными символами $=$, $<$. Неполными теориями в этой сигнатуре являются:

- пустая теория;
- чистая теория равенства;
- теория частичных порядков;
- теория линейных порядков;
- теория плотных линейных порядков.

Все указанные теории содержатся в полной теории DLO плотных линейных порядков без первого и последнего элементов. Указав соответствующие модели, нетрудно убедиться в том, что все эти теории попарно различны и, тем самым, неполны (упражнение).

Пример 5.35. Рассмотрим сигнатуру элементарной геометрии Тарского: $=$, B, $\cong$. Неполными теориями в этой сигнатуре являются, например,

- «безразмерная» геометрия, получаемая выбрасыванием аксиом размерности G8 и G9.
- *абсолютная геометрия*, получаемая удалением аксиомы Евклида G10.

Другой класс составляют теории, сформулированные с целью формализации всей математики в целом или достаточно богатых её частей. Для таких теорий нет — и не должно быть — очевидных принципов, «пропущенных» или «забытых» при выписывании списка их аксиом. Наиболее важные, с точки зрения оснований математики, теории такого универсального типа — это арифметика Пеано и теория множеств Цермело–Френкеля (с аксиомой выбора).

Арифметика Пеано PA. Эта теория формализует математику конечного, то есть ту часть математики, для развития которой не требуется использование бесконечных множеств. Арифметика Пеано основана на аксиомах для натуральных чисел в сигнатуре $=, 0, S, +, \cdot$, приводимых ниже.

Аксиомы арифметики Пеано:

1. аксиомы равенства для $S, +, \cdot$;
2. $\neg S(a) = 0, \quad S(a) = S(b) \to a = b$,
3. $a + 0 = a, \quad a + S(b) = S(a + b)$,
4. $a \cdot 0 = a, \quad a \cdot S(b) = a \cdot b + a$,
5. (Схема аксиом индукции)
   $A[a/0] \wedge \forall x\, (A[a/x] \to A[a/S(x)]) \to \forall x\, A[a/x]$,
   для любой формулы A.

Теория множеств Цермело–Френкеля (с аксиомой выбора) ZFC. Эта теория формализует всю «обычную» математику. Она основана на аксиомах для множеств и отношения принадлежности $\in$. В этом курсе мы не будем рассматривать аксиомы теории множеств.

Глубокий факт неполноты таких теорий как формальная арифметика и теория множеств, и даже более сильный факт их, в определённом смысле, *непополняемости*, составляет содержание знаменитых теорем Гёделя о неполноте. Здесь мы приведём первую теорему Гёделя о неполноте в формулировке Россера. Доказательству этой теоремы посвящена отдельная глава курса.

Пусть язык теории T содержит арифметический.

Теорема 5.36. *Если T содержит* PA*, непротиворечива и эффективно аксиоматизируема, то T неполна.*

Следствие 5.37. (i) PA *неполна.*

(ii) ZFC *неполна при условии её непротиворечивости.*

Замечание 5.38. Формально говоря, язык теории множеств не содержит арифметический. Однако, множество натуральных чисел вместе с операциями сигнатуры арифметики можно определить в языке теории множеств, что обеспечивает применимость теоремы Гёделя к ZFC. Определения такого рода называются *(относительными) интерпретациями.* Они будут рассмотрены в следующем разделе.

6 Интерпретации

Определение 6.1. Модель $(M; \Omega)$ *интерпретируема в* $(N; \Sigma)$, если её носитель M и все предикаты, функции и константы сигнатуры Ω на M определимы в N.

Более явно, это определение можно выразить с помощью понятия перевода.

Определение 6.2. *Перевод* I сигнатуры Ω в сигнатуру Σ задаётся:

- формулой $D_I(a) \in \mathrm{Fm}_\Sigma$, определяющей носитель M;
- сопоставляет каждому символу Ω формулу сигнатуры Σ соответствующей валентности:

$$\begin{array}{ccc} P & \longmapsto & P_I(a_1, \ldots, a_n) \\ f & \longmapsto & F_I(a_1, \ldots, a_n, b) \\ c & \longmapsto & C_I(a) \end{array}$$

Для данного перевода I и модели $(N; \Sigma)$ положим

$$M_I \rightleftharpoons \{x \in N : N \vDash D_I[x]\}.$$

Определение 6.3. Перевод I есть *интерпретация* M *в* N, если

$$(M_I; P_I, f_I, c_I) \cong (M; P, f, c),$$

где P_I, f_I и c_I — предикат, функция и константа на M_I, определимые в N формулами P_I, F_I и C_I, соответственно. (Для простоты мы рассматриваем сигнатуру с единственным предикатным, функциональным и константным символами.)

Замечание 6.4. Для нормальной модели M условие изоморфизма

$$(M_I; =_I) \cong (M; =)$$

говорит о том, что $=_I$ есть отношение равенства на множестве M_I, т.е. можно считать, что $=_I$ есть $=$.

Пример 6.5. $(\mathbb{Z}; <)$ интерпретируема в $(\mathbb{N}; +, =)$.

Интерпретируем чётные натуральные числа как отрицательные, а нечётные как положительные. Чётность числа a выражается формулой $E(a) \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\exists x\ x + x = a)$, а порядок на натуральных числах формулой $a < b \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\exists x\ b = a + x \wedge \neg(x + x = x))$. Тогда перевод I можно задать формулами

$$\begin{array}{lcl} D_I(a) & \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} & (a = a) \\ a <_I b & \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} & (E(a) \wedge E(b) \wedge b < a) \vee \\ & & (E(a) \wedge \neg E(b)) \vee \\ & & (\neg E(b) \wedge \neg E(a) \wedge a < b). \end{array}$$

На практике, требование определимости с точностью до изоморфизма является слишком жёстким и малоупотребительным. Обобщить определение интерпретации M в N можно несколькими естественными способами (или всеми сразу):

- Допускается интерпретация одного объекта из M набором объектов из N (*многомерные интерпретации*).
- Рассматривается *мягкое* (или *неабсолютное*) понятие равенства.
- Допускаются параметры (*параметрические интерпретации*).

Мы разберём эти условия по очереди. Окончательное общее определение интерпретации будет использовать все три условия.

6.1 Многомерные интерпретации

Элементу $a \in M$ сопоставляем набор $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in N^n$ элементов N.

В этом случае перевод I задаётся формулой $D_I(\vec{a})$ и переводом символов Ω следующего вида:

$$\begin{array}{lcl} P & \longmapsto & P_I(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \\ f & \longmapsto & F_I(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}) \\ c & \longmapsto & C_I(\vec{a}) \end{array}$$

Положим

$$M_I \rightleftharpoons \{\vec{x} \in N^n : N \vDash D_I[\vec{x}]\}.$$

Как обычно, I — интерпретация, если

$$(M_I; P_I, f_I, c_I) \cong (M; P, f, c),$$

а P_I, f_I и c_I — предикат, функция и константа на M_I, определимые в N формулами P_I, F_I и C_I, соответственно.

Пример 6.6. Модель $(\mathbb{R}^2; =, B, \cong)$ интерпретируема в $(\mathbb{R}; =, +, \cdot, 0, 1)$.

Эта интерпретация — классическое сведение элементарной геометрии к теории действительных чисел, восходящее к Декарту.

Сначала определим на множестве $\mathbb{R}$ отношение порядка и функцию разности:

$$\begin{aligned} a \leq b &\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\exists z\, a + z \cdot z = b) \\ a - b = c &\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (c + b = a). \end{aligned}$$

После этого перевод можно задать формулами

$$\begin{aligned} D_I(a_1, a_2) &\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (a_1 = a_1 \wedge a_2 = a_2) \\ B_I(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists \lambda, \mu\, (0 \leq \lambda \wedge 0 \leq \mu \wedge \lambda + \mu = 1 \wedge \\ &\qquad\qquad \wedge b_1 = \lambda a_1 + \mu c_1 \wedge b_2 = \lambda a_2 + \mu c_2) \\ \vec{a}\vec{b} \cong_I \vec{c}\vec{d} &\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 = (c_1 - d_1)^2 + (c_2 - d_2)^2. \end{aligned}$$

6.2 Мягкое равенство

Определение 6.7. Пусть $(M; =, P, f)$ — нормальная модель, I — перевод. Вместо изоморфизма $(M_I; =_I, P_I, f_I) \cong M$ требуем:

- Формула $\vec{a} =_I \vec{b}$ удовлетворяет в N аксиомам равенства для сигнатуры Ω, в частности $=_I$ есть отношение эквивалентности и

  $N \vDash \forall \vec{x}, \vec{y}\ (D_I(\vec{x}) \wedge D_I(\vec{y}) \wedge \vec{x} =_I \vec{y} \to (P_I(\vec{x}) \leftrightarrow P_I(\vec{y})))$;

  и аналогично для F_I.
- $(M; =, P, f) \cong (M_I; =_I, P_I, f_I)/{=_I}$.

Пример 6.8. $(\mathbb{Z}; =, +, \cdot, 0, 1)$ интерпретируема в $(\mathbb{N}; =, S, +, \cdot)$.

Число $z \in \mathbb{Z}$ представляем парой $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, где $z = m - n$.

$$
\begin{aligned}
D_I(a_1, a_2) &\overset{\text{def}}{\iff} (a_1 = a_1 \wedge a_2 = a_2) \\
(a_1, a_2) =_I (b_1, b_2) &\overset{\text{def}}{\iff} (a_1 + b_2 = a_2 + b_1) \\
(a_1, a_2) +_I (b_1, b_2) = (c_1, c_2) &\overset{\text{def}}{\iff} (c_1 = a_1 + b_1 \wedge c_2 = a_2 + b_2) \\
(a_1, a_2) \cdot_I (b_1, b_2) = (c_1, c_2) &\overset{\text{def}}{\iff} (c_1 = a_1 b_1 + a_2 b_2 \wedge c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1) \\
0_I(a_1, a_2) &\overset{\text{def}}{\iff} (a_1 = a_2) \\
1_I(a_1, a_2) &\overset{\text{def}}{\iff} (a_1 = S(a_2))
\end{aligned}
$$

6.3 Интерпретации с параметрами

Здесь мы даём наиболее общее определение интерпретации. *Перевод* I задаётся формулой $D_I(\vec{a}, \vec{p})$ со свободными переменными $\vec{p}$ и переводами символов Ω вида:

$$
\begin{aligned}
P &\longmapsto P_I(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n, \vec{p}) \\
f &\longmapsto F_I(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}, \vec{p}) \\
c &\longmapsto C_I(\vec{a}, \vec{p})
\end{aligned}
$$

Определение 6.9. Перевод I есть *интерпретация* M *в* N, если для некоторого набора констант $\vec{c} \in N$:

- $=_I(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ удовлетворяет в N аксиомам равенства для сигнатуры Ω;
- $(M_I; P_I, f_I)/{=_I}$ изоморфна M, где $M_I = \{\vec{x} \in N^n : N \vDash D_I[\vec{x}, \vec{c}]\}$, а P_I и f_I — предикат и функция на M_I определимые в $(N; \vec{c})$ формулами P_I и F_I, соответственно.

Определение 6.10. Набор констант $\vec{c}$, для которого выполнены эти условия, называется *допустимым* для данной интерпретации I.

Определение 6.11. Интерпретация I имеет *определимые параметры*, если для некоторой формулы $\mathrm{Par}_I(\vec{p})$ сигнатуры Σ

- $N \vDash \exists \vec{x}\, \mathrm{Par}_I(\vec{x})$;
- если $N \vDash \mathrm{Par}_I[\vec{c}]$, то набор $\vec{c}$ допустим для I.

Пример 6.12. $(\mathbb{R}; =, +, \cdot, 0, 1)$ интерпретируема в $(\mathbb{R}^2; =, B, \cong)$.

Параметры p_0, p_1 — две различные точки. Действительные числа интерпретируем точками прямой p_0p_1.

$$D_I(a) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (a \in p_0p_1),\ 0_I \rightleftharpoons p_0,\ 1_I \rightleftharpoons p_1$$

$$a +_I b = c \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (Bp_0ac \wedge Bp_0bc \wedge p_0b \cong ac) \vee (Bap_0b \wedge Bacb \wedge ap_0 \cong bc)$$

$$\begin{aligned} a \cdot_I b = c \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists u, v\, (Bp_0uv \wedge p_0u \cong p_0b \wedge p_1u \| av \wedge p_0v \cong p_0c) \wedge \\ \wedge (Bap_0b \leftrightarrow Bcp_0p_1). \end{aligned}$$

Для определения произведения действительных чисел мы используем теорему Фалеса. Первый конъюнктивный член утверждает $|a| \cdot |b| = |c|$, а второй учитывает знак произведения (знак отрицательный, если и только если a и b лежат по разные стороны от p_0).

Упражнение 6.13. *Определить интерпретации:*

- $(\mathbb{C}; =, +, \cdot, 0, 1)$ *в поле* $\mathbb{R}$.
- $(\mathbb{Q}; =, +, \cdot, 0, 1)$ *в стандартной модели* $\mathbb{N}$.
- *Доказать, что поле* $\mathbb{R}$ *не интерпретируемо в поле* $\mathbb{Q}$.

6.4 Перевод формул при интерпретации

Нам будет удобно иметь дело с формулами некоторого упрощённого вида.

Определение 6.14. Формула A *упрощённая*, если всякая атомарная подформула, входящая в A, имеет вид $P(a_1, \dots, a_n)$ или $f(a_1, \dots, a_n) = b$, где $a_1, \dots, a_n, b$ — переменные, а P и f — предикатный и функциональный символы сигнатуры.

Лемма 6.15. *Всякая формула A логически эквивалентна некоторой упрощённой формуле A'.*

Доказательство. Поскольку $P(t) \equiv \exists x\, (P(x) \wedge t = x)$ достаточно доказать эту лемму для случая, когда A — атомарная формула вида $t(\vec{a}) = b$ для некоторого терма t. Рассуждаем индукцией по построению t. Если t — переменная или функциональнй символ, то мы уже имеем требуемое представление (символ равенства входит в сигнатуру).

Иначе $t(\vec{a})$ имеет вид $f(t_1(\vec{a}),\dots,t_n(\vec{a}))$, где t_i — термы меньшей глубины. Тогда имеем

$$t(\vec{a}) = b \equiv \exists x_1 \dots x_n\, (f(x_1,\dots,x_n) = b \wedge t_1(\vec{a}) = x_1 \wedge \dots \wedge t_n(\vec{a}) = x_n).$$

Применяя предположение индукции к термам $t_1,\dots,t_n$ и теорему о замене подформулы на эквивалентную получаем требуемое. $\boxtimes$

Определение 6.16. Пусть I — перевод сигнатуры Ω в Σ. Перевод A^I упрощённой формулы $A \in \mathrm{Fm}_\Omega$ определим индуктивно:

- $P(a,b)^I \rightleftharpoons P_I(\vec{a},\vec{b},\vec{p})$, $(f(a)=b)^I \rightleftharpoons F_I(\vec{a},\vec{b},\vec{p})$,
- $(\neg A)^I \rightleftharpoons \neg A^I$, $(A \wedge B)^I \rightleftharpoons (A^I \wedge B^I)$,
- $(\forall x A[a/x])^I \rightleftharpoons \forall \vec{x}\, (D_I(\vec{x},\vec{p}) \to A^I[\vec{a}/\vec{x}])$,
- $(\exists x A[a/x])^I \rightleftharpoons \exists \vec{x}\, (D_I(\vec{x},\vec{p}) \wedge A^I[\vec{a}/\vec{x}])$.

Переводом произвольной формулы A сигнатуры Ω считаем перевод эквивалентной ей упрощённой формулы. Этот перевод определён однозначно с точностью до логической эквивалентности.

Пусть $\vec{x}_I$ означает элемент модели M_I, соответствующий $x \in M$.

Теорема 6.17. *Для любой A в языке M, любых $\vec{x} \in M$ и допустимых $\vec{c} \in N$*

$$M \vDash A[\vec{x}] \iff N \vDash A^I[\vec{x}_I, \vec{c}].$$

Доказательство. Индукция по построению A. $\boxtimes$

Следствие 6.18. *Если M интерпретируема в N с определимыми параметрами и $Th(N)$ разрешима, то такова и $Th(M)$.*

Доказательство. Для данного предложения A в языке M имеем

$$M \vDash A \iff N \vDash \forall \vec{x}\, (\mathrm{Par}_I(\vec{x}) \to A^I(\vec{x})).$$

Таким образом, для проверки выполнимости формулы A в N достаточно проверить выполнимость $\forall \vec{x}\, (\mathrm{Par}_I(\vec{x}) \to A^I(\vec{x}))$ в модели N. $\boxtimes$

Следствие 6.19. *Разрешимость элементарной геометрии равносильна разрешимости $Th(\mathbb{R})$.*

6.5 Интерпретируемость теорий

Определение 6.20. Перевод I с определимыми параметрами есть *интерпретация теории T в U*, если

- для любой аксиомы $A \in T$ $U \vdash \mathrm{Par}_I(\vec{p}) \to A^I$;
- $U \vdash \mathrm{Par}_I(\vec{p}) \to \exists \vec{x} D_I(\vec{x}, \vec{p})$;
- в U выводимы переводы аксиом равенства для сигнатуры Ω;
- $U \vdash \mathrm{Par}_I(\vec{p}) \to (\forall x \exists! y\, f(x) = y)^I$ для всех $f \in \mathrm{Func}_\Omega$.

Определение 6.21. Теория T *интерпретируема в U*, если существует интерпретация T в U.

Предложение 6.22. *Если T интерпретируема в U и $T \vdash A$, то $U \vdash \forall \vec{x}\, (Par_I(\vec{p}) \wedge D_I(\vec{x}, \vec{p}) \to A^I(\vec{x}, \vec{p}))$.*

Доказательство. Индукция по длине вывода формулы A. ⊠

Следствие 6.23. *Если T интерпретируема в U и теория U непротиворечива, то такова и T.*

Замечание 6.24. Этот результат установлен элементарными (синтаксическими) методами, не опирающимися на теорию множеств. Заметим, что доказательства непротиворечивости, опирающиеся на существование модели, как правило, выходят за рамки элементарных методов, так как обычно модели являются бесконечными и строятся в рамках теории множеств. Метод интерпретаций позволяет избавиться от ненужных гипотез о существовании бесконечных множеств и приводит к «чистому» сведению одной теории к другой.

Следствие 6.25. *Если непротиворечива элементарная евклидова геометрия, то непротиворечива элементарная геометрия Лобачевского.*

Следствие 6.26. *Если непротиворечива арифметика Пеано, то непротиворечива $Th(\mathbb{R})$ и элементарная евклидова геометрия.*

Этот факт вытекает из существования интерпретации $Th(\mathbb{R})$ в арифметике Пеано, которую можно построить исходя из интерпретации поля *вещественных алгебраических* чисел в стандартной модели арифметики.