Введение в математическую логику
Мех-мат МГУ, 1-й курс, весна 2008 г.
Конспект лекции 7

Л.Д. Беклемишев*

3.12 Теории и их модели

Определение 3.64. *Теорией* сигнатуры Σ называем произвольное множество T замкнутых формул языка $\mathcal{L}_\Sigma$. Элементы $A \in T$ называем *нелогическими аксиомами* T.

Пример 3.65. Теория отношения эквивалентности в сигнатуре с единственным бинарным предикатным символом R задаётся следующими тремя нелогическими аксиомами:

1. $\forall x\, R(x, x)$;
2. $\forall x, y\, (R(x, y) \to R(y, x))$;
3. $\forall x, y, z\, (R(x, y) \wedge R(y, z) \to R(x, z))$.

Определение 3.66. Модель $(M; \Sigma)$ есть *модель теории* T (обозначение $M \vDash T$), если для любой $A \in T$ $M \vDash A$.

Пример 3.67. R есть отношение эквивалентности на множестве M, если и только если $(M; R) \vDash T$, где T — теория отношения эквивалентности.

Пример 3.68. Модель $(M; <)$ есть *строгий частичный порядок*, если в $(M; <)$ истинны следующие предложения:

---

*Данный конспект лекций составлен с использованием лекционных материалов ряда сотрудников кафедры математической логики и теории алгоритмов МГУ, в частности конспекта лекций профессора М.Р. Пентуса (2006 г.), на основе программы, разработанной коллективом кафедры.

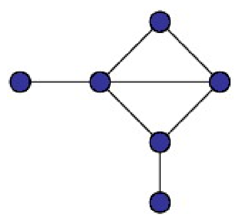
1. $\forall x, y, z\,(x < y \wedge y < z \to x < z)$
2. $\forall x \neg\, x < x$

Это можно считать определением строгих частичных порядков. Аксиомы 1 и 2 задают *теорию строгих частичных порядков.*

Пример 3.69. *Простой граф* — это модель вида $(V; E)$, где V — множество (называемое множеством вершин графа), а E — бинарный предикат *смежности*, причём отношение E симметрично и иррефлексивно:

1. $\forall x \neg\, E(x, x)$
2. $\forall x, y\,(E(x, y) \to E(y, x))$

Аксиомы 1 и 2 задают *теорию простых графов.*



Пример 3.70. $(M; =, \cdot, 1)$ есть *группа*, если M есть модель следующей теории (при условии, что «$=$» в M понимается как равенство):

1. $\forall x, y, z \;\; x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
2. $\forall x\,(1 \cdot x = x \wedge x \cdot 1 = x)$
3. $\forall x \exists y\,(x \cdot y = 1 \wedge y \cdot x = 1)$

Под *теорией групп*, однако, обычно понимают несколько иную теорию, формулируемую в языке с дополнительным функциональным символом для операции взятия обратного элемента. В таком языке аксиомы теории групп выразимы предварёнными формулами, не содержащими кванторов существования.

3.13 Теории с равенством

Пусть Σ — сигнатура, содержащая выделенный предикатный символ «$=$».

Определение 3.71. *Нормальной моделью* называем модель $(M;\Sigma)$, в которой «$=$» интерпретируется как равенство $\{\langle x,x\rangle \mid x\in M\}$.

Определение 3.72. *Аксиомы равенства* для Σ суть универсальные замыкания следующих формул:

1. аксиомы отношения эквивалентности для «$=$»;
2. $a_1=b_1\wedge a_2=b_2\wedge\dots\wedge a_n=b_n\to(P(a_1,\dots,a_n)\leftrightarrow P(b_1,\dots,b_n))$;
3. $a_1=b_1\wedge a_2=b_2\wedge\dots\wedge a_n=b_n\to(f(a_1,\dots,a_n)=f(b_1,\dots,b_n))$.

для всех $f\in\mathrm{Func}_\Sigma$ and $P\in\mathrm{Pred}_\Sigma$.

Следующее предложение вытекает непосредственно из определений.

Предложение 3.73. *Если $(M;\Sigma)$ — нормальная модель, то в M истинны все аксиомы равенства.*

Определение 3.74. *Теорией с равенством* называем теорию в языке с равенством, содержащую все аксиомы равенства.

Теорема 3.75. *Пусть T — теория с равенством. Если T выполнима, то T имеет нормальную модель.*

Доказательство. Пусть $M\vDash T$. Предикат $=_M$ есть отношение эквивалентности на M. Положим $M'\rightleftharpoons M/{=_M}$ — множество классов эквивалентности и пусть $\varphi: M\to M'$ сопоставляет любому $x\in M$ его класс эквивалентности $\varphi(x)\in M'$. Все функции и предикаты сигнатуры Σ естественным образом переносятся с M на M': полагаем

$$\begin{array}{rcl}
P_{M'}(\varphi(x_1),\dots,\varphi(x_n)) & \overset{\text{def}}{\iff} & P_M(x_1,\dots,x_n)\\
f_{M'}(\varphi(x_1),\dots,\varphi(x_n)) & \rightleftharpoons & \varphi(f_M(x_1,\dots,x_n))\\
c_{M'} & \rightleftharpoons & \varphi(c_M).
\end{array}$$

Заметим, что в силу истинности аксиом равенства в M все функции и предикаты корректно определены на M', и M' — нормальная модель.

Индукцией по построению формулы A проверяем

$$M\vDash A[x_1,\dots,x_n]\iff M'\vDash A[\varphi(x_1),\dots,\varphi(x_n)].$$

Отсюда следует $M'\vDash T$.

Упражнение 3.76. *Выпишете аксиомы теории коммутативных колец с единицей в сигнатуре* $=, +, -, \cdot, 0, 1$.

Упражнение 3.77. *Выпишете аксиомы теории полей в той же сигнатуре.*

3.14 Элементарная геометрия

Полная система аксиом для элементарной геометрии была построена Давидом Гильбертом. В дальнейшем аксиоматика Гильберта была оптимизирована целым рядом исследователей. По-видимому, наиболее простая аксиоматика (на основе понятия точки и отношений $B, \cong$) была предложена Альфредом Тарским. Им же были получены фундаментальные результаты о полноте и разрешимости элементарной геометрии.

Элементарная геометрия Тарского представляет собой теорию первого порядка с равенством в сигнатуре $=, B, \cong$, задаваемую следующими аксиомами G1–G11.

Аксиоматика Тарского:

G1. $ab \cong ba$

G2. $ab \cong pq \wedge ab \cong rs \to pq \cong rs$

G3. $ab \cong cc \to a = b$

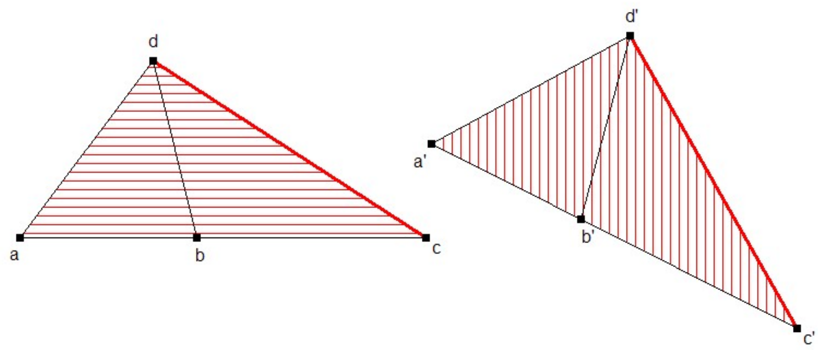
G4. $Babd \wedge Bbcd \to Babc$

G5. $\exists x\, (Bqax \wedge ax \cong bc)$

На прямой qa в сторону от точки a противоположную q можно отложить отрезок заданной длины.

G6. (аксиома о пяти отрезках)

$$(a \neq b \wedge Babc \wedge Ba'b'c' \wedge ab \cong a'b' \wedge bc \cong b'c' \wedge ad \cong a'd' \wedge bd \cong b'd') \to cd \cong c'd'$$

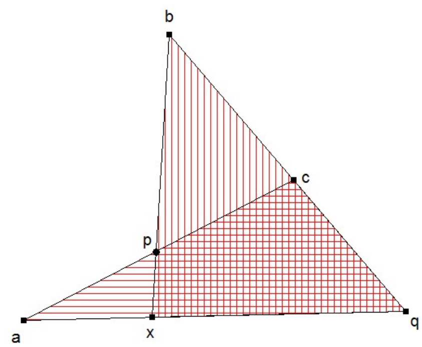


Если даны четыре точки $abcd$ и соответствующие им точки $a'b'c'd'$ такие, что длины соответствующих рисунку четырёх (помеченных чёрным цветом) отрезков равны, то равны и длины пятых (помеченных красным) отрезков.

Эта аксиома заменяет признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними и позволяет избежать использования понятия «угол» в аксиомах геометрии.

G7. (аксиома Паша)

$$Bapc \wedge Bqcb \rightarrow \exists x\,(Baxq \wedge Bbpx)$$



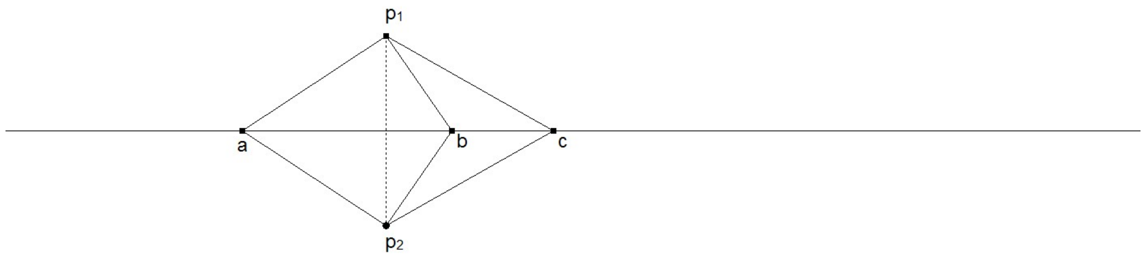
Следующие аксиомы G8 и G9 называются аксиомами размерности. G8 влечёт, что размерность пространства не менее двух, а G9 — что она не более двух.

G8. $(dim \geq 2)$
$\exists x, y, z\, (\neg Bxyz \wedge \neg Byzx \wedge \neg Bzxy)$

Существуют три точки, не лежащие на одной прямой.

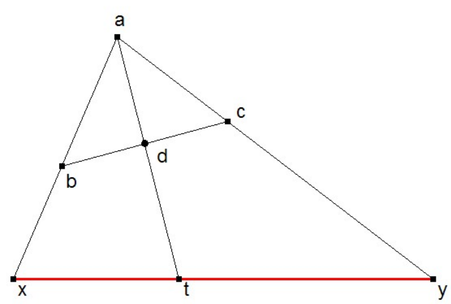
G9. $(dim \leq 2)$
$(p_1 \neq p_2 \wedge ap_1 \cong ap_2 \wedge bp_1 \cong bp_2 \wedge cp_1 \cong cp_2) \rightarrow a \in bc$

Точки, находящиеся на равном расстоянии от двух данных точек p_1, p_2, лежат на одной прямой.



G10. (аксиома Евклида)

$$Badt \land Bbdc \land a \neq d \to \exists x, y\,(Babx \land Bacy \land Bytx)$$



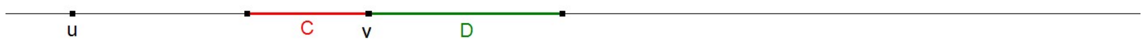
Эта аксиома является одной из эквивалентных форм аксиомы о параллельных.

G11. (схема аксиом непрерывности)

Для любых формул C, D имеем аксиому

$$\exists u \forall x, y\,(C[a/x] \land D[a/y] \to Buxy) \to \\ \exists v \forall x, y\,(C[a/x] \land D[a/y] \to Bxvy)$$

Переменные x, y, u, v не входят в C, D.



Если точки, удовлетворяющие свойству C, лежат между фиксированной точкой u и любой из точек, удовлетворяющих свойству D, то найдётся точка v разделяющая точки из C и D.

Таким образом, эта аксиома является разновидностью известной из курса анализа аксиомы полноты (для действительной прямой). Принципиально, что здесь речь идёт лишь о множествах точек *определимых* формулами C и D языка элементарной геометрии.

В полном своём объёме, то есть для произвольных подмножеств прямой, эта аксиома не выразима в логике первого порядка (без использования понятия множества).

Замечание 3.78. В геометрии второго порядка наряду с переменными по точкам пространства имеются переменные $X, Y, \ldots$ по произвольным множествам точек и бинарное отношение $\in$ между точками и множествами. Замена схемы $G11$ на нижеследующую аксиому непрерывности второго порядка $G11'$ даёт полную аксиоматику геометрии евклидовой плоскости, эквивалентную известной аксиоматике Гильберта. Эта система аксиом обладает свойством *категоричности*, состоящим в том, что любая модель системы аксиом $G1 - G11'$ *изоморфна* евклидовой плоскости. Ниже мы установим, что никакое множество аксиом первого порядка не обладает этим свойством.

G11$'$. (аксиома непрерывности 2-го порядка)

$$\forall X, Y\, (\exists u \forall x, y\, (x \in X \wedge y \in Y \to Buxy) \to\ \exists v \forall x, y\, (x \in X \wedge y \in Y \to Bxvy)).$$

3.15 Теоремы Тарского о полноте и разрешимости элементарной геометрии

Приведём без доказательства следующие два важных результата, принадлежащих Альфреду Тарскому.

Теорема 3.79. *Для любого предложения A языка элементарной геометрии, если $(\mathbb{R}^2; =, B, \cong) \vDash A$, то A логически следует из аксиом G1–G11.*

Теорема 3.80. *Существует алгоритм проверки произвольной формулы A языка элементарной геометрии на выполнимость в $\mathbb{R}^2$.*

4 Исчисление предикатов

4.1 Аксиомы и правила вывода

Исчисление предикатов сигнатуры Σ задаётся следующими схемами аксиом и правилами вывода.

Аксиомы:

A1. аксиомы исчисления высказываний,

A2. $\forall x A[a/x] \to A[a/t]$,

A3. $A[a/t] \to \exists x A[a/x]$.

Схему аксиом A1 более аккуратно мы понимаем следующим образом. Если $A(P_1, \dots, P_n)$ — аксиома исчисления высказываний, то формула $A[P_1/C_1, \dots, P_n/C_n]$ есть аксиома исчисления предикатов для любых формул $C_1, \dots, C_n$ сигнатуры Σ.

В аксиомах A2 и A3 A — любая формула сигнатуры Σ и t — любой терм (переменная x не входит в A).

Правила вывода:

R1. $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$ (*modus ponens*)

R2. $\dfrac{A \to B}{A \to \forall x B[a/x]}$

R3. $\dfrac{B \to A}{\exists x B[a/x] \to A}$

В правилах R2 и R3 переменная a не входит в A (и x не входит в B). Правила R2 и R3 называются *правилами Бернайса.*

Определение 4.1. *Выводом в исчислении предикатов* называется конечная последовательность формул, каждая из которых либо является аксиомой, либо получается из предыдущих формул по одному из правил вывода $R1 - R3$.

Пример 4.2.

$$\begin{array}{ll} \forall x A[a/x] \to A & \text{(A2)} \\ \forall x A[a/x] \to \forall y A[a/y] & \text{(R2)} \end{array}$$

Определение 4.3. Формула A называется *выводимой* в исчислении предикатов или *теоремой* исчисления предикатов (обозначение $\vdash A$), если существует вывод, в котором последняя формула есть A.

Пример 4.4. $\vdash \forall x A[a/x] \to \forall y A[a/y]$ для любой формулы A.

4.2 Выводимость в теории

Для исчисления предикатов мы рассматриваем понятие *выводимости в теории*, которое является аналогом понятия выводимости из гипотез для исчисления высказываний. Нам будет удобно считать, что гипотезы являются замкнутыми формулами, что соответствует понятию теории как множеству *замкнутых* формул.

Определение 4.5. *Выводом в теории* T называется конечная последовательность формул, каждая из которых либо принадлежит множеству T, либо является логической аксиомой вида $A1 - A3$, либо получается из предыдущих формул по одному из правил вывода $R1 - R3$.

Определение 4.6. Формула A называется *выводимой (доказуемой) в теории* T или *теоремой* T (обозначение $T \vdash A$), если существует вывод в T, в котором последняя формула есть A.

Определение 4.7. Формула A *опровержима* в T, если $T \vdash \neg A$.

Определение 4.8. Формула A *независима* от T, если $T \nvdash A$ и $T \nvdash \neg A$.

Простейшие свойства отношения выводимости в теории для исчисления предикатов аналогичны свойствам отношения выводимости из гипотез для исчисления высказываний.

- Если $T \subseteq U$ и $T \vdash A$, то $U \vdash A$ (*монотонность*).
- Если $T \vdash A$, то существует такое конечное множество $T_0 \subseteq T$, что $T_0 \vdash A$ (*компактность*).
- Если $T \vdash A$ и для каждой аксиомы $B \in T$ имеет место $U \vdash B$, то $U \vdash A$ (*транзитивность*).

Пусть T, U — теории сигнатуры Σ.

Определение 4.9. Теория U *содержит* T, если для любой $A \in T$ $U \vdash A$ (обозначение $U \vdash T$).

Определение 4.10. Теории T и U *(дедуктивно) эквивалентны*, если $T \vdash U$ и $U \vdash T$ (обозначение $T \equiv U$).

4.3 Теорема о тавтологии

Предложение 4.11. *Если* $A(P_1, \dots, P_n)$ *выводима в исчислении высказываний, то для любых формул* $C_1, \dots, C_n$ *сигнатуры* Σ *формула*

$$A[P_1/C_1, \dots, P_n/C_n]$$

выводима в исчислении предикатов.

Доказательство. Индукция по построению вывода формулы A. Если A — аксиома исчисления высказываний, то результат подстановки является аксиомой вида A1. Если A получена из B и $B \to A$ по правилу modus ponens, то по предположению индукции в исчислении предикатов выводимы формулы $B[P_1/C_1, \dots, P_n/C_n]$ и $B[P_1/C_1, \dots, P_n/C_n] \to A[P_1/C_1, \dots, P_n/C_n]$. Отсюда $A[P_1/C_1, \dots, P_n/C_n]$ выводится по правилу modus ponens. ⊠

Замечание 4.12. Это предложение удобно применять в комбинации с теоремой о полноте для исчисления высказываний. Поскольку любая тавтология выводима в исчислении высказываний, аналогичное утверждение имеет место в предположении, что $A(P_1, \dots, P_n)$ — тавтология.

Пример 4.13. Для любой формулы A сигнатуры Σ формулы $A \to A$ и $A \vee \neg A$ выводимы в исчислении предикатов.

4.4 Теорема о дедукции

Как обычно, пишем $T, A \vdash B$ вместо $T \cup \{A\} \vdash B$.

Теорема 4.14. *Для любой теории* T *и* замкнутой *формулы* A

$$T, A \vdash B \iff T \vdash A \to B.$$

Доказательство. Индукция по длине вывода $T, A \vdash B$. Разбираем лишь новые случаи, относящиеся к правилам R2 и R3.

Допустим $B = (C \to \forall x D[a/x])$ получена из $C \to D$ по R2. По предположению индукции

$$T \vdash A \to (C \to D).$$

Надо построить вывод

$$T \vdash A \to (C \to \forall x D[a/x]).$$

Рассмотрим тавтологию

$$(P \to (Q \to R)) \leftrightarrow (P \wedge Q \to R).$$

Подставляя A вместо P, C вместо Q и D вместо R получаем, что формула

$$(A \to (C \to D)) \leftrightarrow (A \wedge C \to D)$$

выводима в исчислении предикатов.

Таким образом, вывод $A \to (C \to D)$ в T можно продолжить:

$A \to (C \to D)$	
$(A \to (C \to D)) \to (A \wedge C \to D)$	(тавтология)
$(A \wedge C) \to D$	(MP)
$(A \wedge C) \to \forall x D[a/x]$	(R2, A замкнута)
$A \to (C \to \forall x D[a/x])$	(аналогично)

Правило R3 рассматривается аналогично. ⊠

4.5 Непротиворечивость и корректность

Определение 4.15. Теория T *противоречива*, если существует формула A такая, что $T \vdash A$ и $T \vdash \neg A$. В противном случае теория T называется *непротиворечивой*.

Из теоремы о дедукции получаем следующее следствие.

Следствие 4.16. *Пусть формула A замкнута. Тогда теория $T \cup \{A\}$ противоречива $\iff$ $T \vdash \neg A$.*

Следующая теорема называется *теоремой о корректности исчисления предикатов.*

Теорема 4.17. *Если $M \vDash T$ и $T \vdash B(b_1, \ldots, b_n)$, то $M \vDash B[b_1/x_1, \ldots, b_n/x_n]$ для любых $x_1, \ldots, x_n \in M$.*

Доказательство. Индукция по длине вывода формулы B в T. Если $B \in T$, то $M \vDash B$, поскольку $M \vDash T$.

Рассмотрим случай, когда B — логическая аксиома вида A3, то есть $B = (A[a/t] \to \exists x A[a/x])$. Можно считать B (после подстановки констант вместо свободных переменных) замкнутой формулой, а t — замкнутым термом сигнатуры $\Sigma(M)$.

Допустим $M \vDash A[a/t]$. Пусть $c \rightleftharpoons t_M$, тогда $M \vDash A[a/\underline{c}]$, а значит и $M \vDash \exists x\, A[a/x]$ (см. определение истинности формул). Тем самым доказано, что $M \vDash A[a/t] \to \exists x A[a/x]$.

Аксиомы вида А3 рассматриваются аналогично.

Рассмотрим случай, когда B — аксиома А1, то есть B имеет вид $B_0[P_1/C_1, \dots, P_n/C_n]$, где $B_0(P_1, \dots, P_n)$ — аксиома исчисления высказываний. Считаем $C_1, \dots, C_n$ замкнутыми формулами сигнатуры $\Sigma(M)$ и докажем $M \vDash B$.

Допустим $M \nvDash B$. Рассмотрим оценку f пропозициональных переменных $P_1, \dots, P_n$ такую, что

$$f(P_i) = \text{И} \overset{\text{def}}{\iff} M \vDash C_i.$$

Тогда для любой пропозициональной формулы $D(P_1, \dots, P_n)$ индукцией по построению D легко доказывается эквивалентность

$$f(D) = \text{И} \iff M \vDash D[P_1/C_1, \dots, P_n/C_n].$$

В частности, для $D = B_0$ получаем $f(B_0) = \text{Л}$, поскольку $M \nvDash B$. Это противоречит предположению о том, что B_0 — тавтология.

Рассмотрим теперь случай, когда B получена по одному из правил вывода R1–R3.

Если B получена из A и $A \to B$ по правилу modus ponens, мы имеем по предположению индукции $M \vDash A$ и $M \vDash A \to B$ (считая A и B замкнутыми формулами сигнатуры $\Sigma(M)$). Тогда $M \vDash B$ в силу определения истинности для импликации.

Допустим $B = (A \to \forall x\, C[a/x])$ получена из $A \to C$ по правилу R2. Считаем B замкнутой формулой в сигнатуре $\Sigma(M)$. По предположению индукции $M \vDash A \to C[a/\underline{c}]$ для всех $c \in M$. Если $M \nvDash A$, то очевидно $M \vDash A \to \forall x\, C[a/x]$. Иначе $M \vDash C[a/\underline{c}]$ для всех $c \in M$ и тем самым $M \vDash \forall x\, C[a/x]$. Правило R3 рассматривается аналогично. $\boxtimes$

Следствие 4.18. *Если $\vdash A$, то A общезначима.*

Теорема о корректности исчисления предикатов играет роль при доказательстве непротиворечивости теорий и доказательстве независимости утверждений относительно данной теории.

Следствие 4.19. *Если теория T имеет модель, то T непротиворечива.*

Пример 4.20. Следующие теории непротиворечивы:

- исчисление предикатов данной сигнатуры (с пустым множеством нелогических аксиом);

- теория отношения эквивалентности;

- теория групп;

- элементарная геометрия.

Для доказательства независимости утверждений полезно следующее следствие теоремы о корректности.

Следствие 4.21. *Если существует модель M теории T для которой $M \nvDash A$, то $T \nvdash A$.*

Пример 4.22. Модель Пуанкаре $\mathbf{H}^2$ показывает, что аксиома Евклида не выводима из остальных аксиом элементарной геометрии. Модель $\mathbb{R}^2$ показывает, что отрицание аксиомы Евклида не выводимо из остальных аксиом.

5 Теоремы о полноте и компактности

5.1 Теорема Гёделя о полноте

Теорема 5.1. 1. *Всякая непротиворечивая теория T выполнима, то есть имеет модель $M \vDash T$.*

2. *Если $T \nvdash A$, то найдётся модель $M \vDash T$ для которой $M \nvDash A$.*

3. *$T \vDash A$ влечёт $T \vdash A$.*

Мы не доказываем теорему Гёделя о полноте, но установим равносильность этих утверждений.

$(1 \Rightarrow 2)$: Если $T \nvdash A$, то по теореме о дедукции $T \cup \{\neg A\}$ непротиворечива. Следовательно, $T \cup \{\neg A\}$ имеет модель M.

$(2 \Rightarrow 3)$: очевидно.

$(3 \Rightarrow 1)$: Возьмём $A = (B \wedge \neg B)$. Тогда $T \nvdash A$, следовательно $T \nvDash A$ и у теории T должна быть модель (опровергающая A).

5.2 Теорема Мальцева о компактности

Теорема 5.2. *1. Теория T выполнима $\iff$ любое конечное подмножество $T_0 \subseteq T$ выполнимо.*

2. $T \vDash A \iff$ существует такое конечное множество $T_0 \subseteq T$, что $T_0 \vDash A$.

Теорема о компактности вытекает из теоремы о полноте и свойства компактности отношения выводимости. Она является полезным инструментом при построении моделей теорий первого порядка. В качестве важного примера мы рассмотрим нестандартные модели арифметики.

5.3 Нестандартные модели арифметики

Пример 5.3. Пусть $(\mathbb{N}; =, S, +, \cdot, 0)$ — стандартная модель арифметики и $Th(\mathbb{N})$ есть множество *всех* истинных в $\mathbb{N}$ предложений.

Добавим к сигнатуре новую константу c и рассмотрим теорию

$$T \rightleftharpoons Th(\mathbb{N}) \cup \{\neg c = 0, \neg c = S0, \neg c = SS0, \dots\}.$$

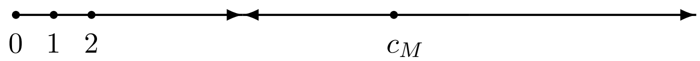
Терм $\bar{n} \rightleftharpoons SS\dots S0$ (n раз) называем *нумералом.* Нумералы служат именами натуральных чисел.

Утверждение 5.4. *Каждая конечная подтеория $T_0 \subseteq T$ выполнима.*

Доказательство. T_0 содержит лишь кончное число аксиом вида $c \neq \bar{n}_1, \dots, c \neq \bar{n}_k$. Интерпретируем константу c в стандартной модели как любое число $m > n_1, \dots, n_k$. ⊠

По теореме о компактности существует (нормальная) модель $M \vDash T$. Модель M обладает следующими свойствами:

- $\mathbb{N}$ изоморфна начальному сегменту M; вложение $\mathbb{N} \to M$ задаётся функцией $\varphi : n \longmapsto \bar{n}_M$.
- $M \vDash Th(\mathbb{N})$;
- $M \ncong \mathbb{N}$, в частности $c_M \in M$ есть «бесконечно большое число», поскольку c_M отлично от всякого $n \in \mathbb{N}$.



Формула $a < b \rightleftharpoons \exists x\,(x \neq 0 \wedge a + x = b)$ определяет порядок в $\mathbb{N}$. Для данной формулы в $\mathbb{N}$ выполнены аксиомы строгого линейного порядка и следующие предложения:

- $\forall x\,(0 < x \vee 0 = x)$;
- $\forall x \exists y\,(x < y \wedge \forall z\,(z < y \to z = x \vee z < x))$;
- $\forall y\,(y \neq 0 \to \exists x\,(x < y \wedge \forall z\,(z < y \to z = x \vee z < x)))$.

Следовательно, те же аксиомы выполнены и в M. Поэтому предикат $<_M$ на M представляет собой строгий линейный порядок с наименьшим элементом 0. При этом каждый элемент имеет последователя, и каждый элемент, кроме 0, имеет непосредственного предшественника.

Определение 5.5. Элементы $x, y \in M$ *близки*, если для некоторого $n \in \mathbb{N}$ выполнено $y = SS\ldots S(x)$ или $x = SS\ldots S(y)$ (n символов S).

Классы эквивалентности по отношению близости называем *галактиками.*

Утверждение 5.6. *Если G — галактика в M, $G \neq \mathbb{N}$, то порядок $(G, <_M)$ изоморфен $(\mathbb{Z}, <)$.*

Пусть $\mathcal{G}$ есть множество всех галактик в M. Определим $G_1 <_M G_2$, если для любых $x \in G_1$, $y \in G_2$ $x <_M y$.

Теорема 5.7. *Порядок $(\mathcal{G}, <_M)$ есть плотный порядок без наибольшего элемента, наименьшим элементом которого является $\mathbb{N}$.*

Доказательство. Если $G_1 < G_2$, возьмём чётные $x_1 \in G_1$ и $x_2 \in G_2$ и рассмотрим $y = (x_1 + x_2)/2$ (функция $g(x) = x/2$ определима в $\mathbb{N}$, а значит и в M).

Если $y \in G_1$, то $(x_1 + x_2)/2 = x + \bar{n}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда $2x_1 + 2\bar{n} = x_1 + x_2$, откуда $x_1 + 2\bar{n} = x_2$, то есть $x_2 \in G_1$.

Аналогично показываем $y \notin G_2$.

Доказательство отсутствия наибольшего элемента оставляем в качестве упражнения. ⊠

Упражнение 5.8. *Доказать, что для любой галактики* G_1 *в* M *найдётся галактика* G_2 *такая, что* $G_1 < G_2$.