Введение в математическую логику
Мех-мат МГУ, 1-й курс, весна 2008 г.
Конспект лекции 4

Л.Д. Беклемишев*

2.6 Непротиворечивые множества формул

Определение 2.22. Множество формул Γ называется *противоречивым*, если для некоторой формулы A имеем $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \vdash \neg A$. В противном случае Γ называется *непротиворечивым*.

Замечание 2.23. Если Γ противоречиво, то $\Gamma \vdash B$ для любой формулы B в силу выводимости $A, \neg A \vdash B$.

Замечание 2.24. Γ противоречиво, если и только если существует конечное противоречивое подмножество $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$.

Лемма 2.25. $\Gamma \cup \{B\}$ *противоречиво* $\iff \Gamma \vdash \neg B$.

Доказательство. Если $\Gamma \vdash \neg B$, то $\Gamma \cup \{B\}$ противоречиво, поскольку в качестве A можно взять B.

Если $\Gamma, B \vdash A, \neg A$, то по теореме о дедукции $\Gamma \vdash B \to A, B \to \neg A$. По аксиоме $(B \to A) \to ((B \to \neg A) \to \neg B)$ отсюда следует $\Gamma \vdash \neg B$. ⊠

Определение 2.26. Γ называется *максимальным непротиворечивым* множеством, если Γ непротиворечиво и для любой формулы $A \notin \Gamma$ $\Gamma \cup \{A\}$ противоречиво.

Пример 2.27. Пусть f — фиксированная оценка, тогда множество $\Gamma_f \rightleftharpoons \{A : f(A) = \text{И}\}$ — максимальное непротиворечивое.

---

*Данный конспект лекций составлен с использованием лекционных материалов ряда сотрудников кафедры математической логики и теории алгоритмов МГУ, в частности конспекта лекций профессора М.Р. Пентуса (2006 г.), на основе программы, разработанной коллективом кафедры.

Теорема 2.28 (Линденбаума). *Для всякого непротиворечивого множества формул Γ_0 найдётся максимальное непротиворечивое $\Gamma \supseteq \Gamma_0$.*

Доказательство (для счётного числа переменных). Пусть $A_0, A_1, \ldots$ — пересчёт всех формул языка. Определим последовательность множеств, начинающуюся с данного множества Γ_0,

$$\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \cdots \subseteq \Gamma_n \subseteq \ldots$$

по следующему правилу:

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{A_n\}, \text{ если } \Gamma_n \cup \{A_n\} \text{ непротиворечиво;} \\ \Gamma_n, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Положим $\Gamma \rightleftharpoons \bigcup_{n \geq 0} \Gamma_n$. Утверждение теоремы вытекает из следующей леммы.

Лемма 2.29. (i) *Для любого n множество Γ_n непротиворечиво.*

(ii) Γ *— максимальное непротиворечивое множество.*

Доказательство. Утверждение (i) доказывается индукцией по n. Из (i) вытекает непротиворечивость Γ (в силу свойства компактности). Поэтому для доказательства утверждения (ii) достаточно установить максимальность.

Допустим $A \notin \Gamma$. Поскольку в исходном пересчёте встречаются все формулы, для некоторого k формула A есть A_k. Поскольку $A_k \notin \Gamma$, множество $\Gamma_k \cup \{A_k\}$ противоречиво (иначе мы присоединили бы A_k на шаге k). Значит, противоречиво и объемлющее множество $\Gamma \cup \{A_k\}$. ⊠

Замечание 2.30. Для несчётного языка теорема Линденбаума доказывается, опираясь на лемму Цорна (эквивалентную аксиоме выбора). Как нетрудно показать, объединение возрастающей цепи непротиворечивых множеств непротиворечиво. Отсюда непосредственно вытекает требуемый результат.

Предложение 2.31. *Пусть Γ — максимальное непротиворечивое множество. Тогда для любых формул A, B*

(i) $\neg A \in \Gamma \iff A \notin \Gamma$;

(ii) $(A \wedge B) \in \Gamma \iff A \in \Gamma$ *и* $B \in \Gamma$;

(iii) $(A \vee B) \in \Gamma \iff A \in \Gamma$ *или* $B \in \Gamma$;

(iv) $(A \to B) \in \Gamma \iff A \notin \Gamma$ *или* $B \in \Gamma$.

Доказательство. (i) Рассуждаем от противного. Если обе формулы $A, \neg A \in \Gamma$, то Γ противоречиво. Если же $A, \neg A \notin \Gamma$, то противоречивы, соответственно, множества $\Gamma \cup \{A\}$ и $\Gamma \cup \{\neg A\}$ в силу максимальности. Отсюда по лемме 2.25 получаем $\Gamma \vdash \neg A, \neg\neg A$, т.е. Γ противоречиво.

(ii) Пусть $(A \wedge B) \in \Gamma$, $A \notin \Gamma$. Тогда, в силу максимальности, $\Gamma \cup \{A\}$ противоречиво, откуда $\Gamma \vdash \neg A$. С другой стороны, по аксиоме $(A \wedge B) \to A$ имеем $A \wedge B \vdash A$. Значит, $\Gamma \vdash A$, т.е. Γ противоречиво.

Аналогично рассматриваем случай $(A \wedge B) \in \Gamma$, $B \notin \Gamma$.

Пусть теперь $(A \wedge B) \notin \Gamma$ и $A, B \in \Gamma$. Тогда по максимальности $\Gamma \vdash \neg(A \wedge B)$. С другой стороны, по аксиоме $A \to (B \to (A \wedge B))$ имеем $\Gamma \vdash A \wedge B$, т.е. Γ противоречиво.

(iii) доказывается аналогично (ii).

(iv) Допустим $(A \to B) \in \Gamma$, $A \in \Gamma$, $B \notin \Gamma$. Тогда $\Gamma \cup \{B\}$ противоречиво, откуда $\Gamma \vdash \neg B$. С другой стороны, по правилу modus ponens $\Gamma \vdash B$, т.е. Γ противоречиво.

Допустим $(A \to B) \notin \Gamma$, $A \notin \Gamma$. Тогда в силу максимальности $\Gamma \vdash \neg A$, $\Gamma \vdash \neg(A \to B)$.

Заметим, что $\neg(A \to B) \vdash A$. Действительно, из $A, \neg A \vdash B$ получаем $\neg A \vdash A \to B$, отсюда с помощью контрапозиции и снятия двойного отрицания $\neg(A \to B) \vdash \neg\neg A \vdash A$.

Поскольку $\Gamma \vdash \neg(A \to B)$, отсюда получаем $\Gamma \vdash A$, т.е. Γ противоречиво.

Случай $(A \to B) \notin \Gamma$, $B \in \Gamma$ рассматривается аналогично, с использованием выводимости $\neg(A \to B) \vdash \neg B$. Последняя вытекает с помощью контрапозиции из очевидного $B \vdash A \to B$. ⊠

2.7 Теорема о полноте исчисления высказываний

Теорема 2.32. *Множество* Γ *непротиворечиво тогда и только тогда, когда* Γ *выполнимо.*

Доказательство. Выполнимость влечёт непротиворечивость. Пусть f — такая оценка, что $f(A) = \text{И}$ для всех формул $A \in \Gamma$. Простой индукцией по построению вывода убедимся, что $f(B) = \text{И}$ для любой формулы B такой, что $\Gamma \vdash B$. Тем самым, B не может быть противоречием.

Непротиворечивость влечёт выполнимость. Допустим Γ непротиворечиво. По теореме Линденбаума расширим Γ до максимального непротиворечивого множества формул Γ'. Определим оценку f следующим образом: для любой переменной P

$$f(P) = \text{И} \stackrel{\text{def}}{\iff} P \in \Gamma'.$$

Утверждение теоремы вытекает из следующей леммы.

Лемма 2.33. *Для любой формулы A*

$$f(A) = \textit{И} \iff A \in \Gamma'.$$

Доказательство. Индукция по построению формулы A.

Если A — переменная, то утверждение верно непосредственно по определению f.

Если $A = \neg B$, то пользуясь последовательно определением оценки, предположением индукции и предложением 2.31 (i) имеем

$$f(\neg B) = \text{И} \iff f(B) \neq \text{И} \iff B \notin \Gamma' \iff (\neg B) \in \Gamma'.$$

Если $A = (B \to C)$, то аналогично по предложению 2.31 (iv) получаем

$$f(B \to C) = \text{И} \iff (f(B) \neq \text{И} \text{ или } f(C) = \text{И}) \iff$$
$$\iff (B \notin \Gamma' \text{ или } C \in \Gamma') \iff (B \to C) \in \Gamma'.$$

Оставшиеся случаи рассматриваются аналогично. ⊠

Поскольку $\Gamma \subseteq \Gamma'$, для любой $A \in \Gamma$ получаем $f(A) = \text{И}$, что и требовалось. ⊠

Теорема 2.34 (полнота). *Всякая тавтология выводима в исчислении высказываний.*

Полнота исчисления высказываний следует из более общего свойства *сильной полноты.*

Теорема 2.35 (сильная полнота). *Для любого множества формул Γ и любой формулы A*

$$\Gamma \models A \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash A.$$

Доказательство. Заметим, что $\Gamma \models A$ влечёт невыполнимость множества $\Gamma \cup \{\neg A\}$. По теореме 2.32 множество $\Gamma \cup \{\neg A\}$ противоречиво и тем самым $\Gamma \vdash \neg\neg A \vdash A$. ⊠

Таким образом, семантическое следование в логике высказываний равносильно выводимости из гипотез:

Следствие 2.36. $\Gamma \vDash A \iff \Gamma \vdash A$.

Следствие 2.37 (компактность). $\Gamma \vDash A \iff \Gamma_0 \vDash A$ *для любого конечного подмножества* $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$.