Введение в математическую логику
Мех-мат МГУ, 1-й курс, весна 2008 г.
Конспект лекции 3

Л.Д. Беклемишев*

1.9 Нормальные формы

1.9.1 Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы

Определение 1.55. *Литералами* называются переменные и их отрицания.

Пример 1.56. Формулы P_3 и $\neg P_1$ являются литералами, а формулы $P_3 \vee P_1$ и $\neg\neg P_3$ — не являются.

Определение 1.57. *Элементарной конъюнкцией* называем формулу вида $\bigwedge_{i=1}^{n} L_i$, где L_i — литералы.

Пример 1.58. Формула $(P \wedge \neg Q) \wedge \neg P$ является элементарной конъюнкцией, а формула $P \wedge (\neg Q \wedge \neg P)$ не является элементарной конъюнкцией.

Определение 1.59. *Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)* называем формулу вида $\bigvee_{j=1}^{m} C_j$, где C_j — элементарные конъюнкции.

Пример 1.60. Формулы $(P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge R)$ и $(P \wedge Q \wedge R) \vee \neg P \vee \neg R$ являются дизъюнктивными нормальными формами.

Упражнение 1.61. *Привести к дизъюнктивной нормальной форме формулу $(P \vee Q) \to R$. Ответ: $(\neg P \wedge \neg Q) \vee R$.*

---

*Данный конспект лекций составлен с использованием лекционных материалов ряда сотрудников кафедры математической логики и теории алгоритмов МГУ, в частности конспекта лекций профессора М.Р. Пентуса (2006 г.), на основе программы, разработанной коллективом кафедры.

Аналогично определяются элементарные дизъюнкции и конъюнктивные нормальные формы.

Определение 1.62. *Элементарной дизъюнкцией* называем формулу вида $\bigvee_{i=1}^{n} L_i$, где L_i — литералы.

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называем формулу вида $\bigwedge_{j=1}^{m} D_j$, где D_j — элементарные дизъюнкции.

Упражнение 1.63. *Привести к конъюнктивной нормальной форме формулу $(P \vee Q) \to R$. Ответ: $(\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$.*

Теорема 1.64. *Каждая пропозициональная формула равносильна некоторой дизъюнктивной нормальной форме и некоторой конъюнктивной нормальной форме.*

Доказательство (первый вариант). Если A тождественно ложна, в качестве её ДНФ можно взять формулу $P \wedge \neg P$, где P — любая переменная. В противном случае достаточно заметить, что формула, построенная в доказательстве теоремы о функциональной полноте для функции φ_A есть ДНФ.

Доказательство (второй вариант). Выразим $\to$ через $\neg$ и $\vee$. Далее преобразуем формулу, применяя таблицу основных эквивалентностей и акивно пользуясь правилом замены подформулы на эквивалентную. Сначала проносим все отрицания максимально вглубь формулы и удаляем многократные отрицания. Затем, пользуясь дистрибутивностью, выносим все дизъюнкции максимально наружу. Пользуясь ассоциативностью $\wedge$ и $\vee$ расставляем правильно скобки.

Осталось заметить, что если A — дизъюнктивная нормальная форма, то формула $\neg A$ превращается в конъюнктивную нормальную форму после переноса всех отрицаний вглубь и удаления двойных отрицаний. Значит, для того чтобы получить конъюнктивную нормальную форму формулы A, достаточно применить этот процесс к дизъюнктивной нормальной форме формулы $\neg A$. ⊠

1.9.2 Совершенные ДНФ и КНФ

В этом параграфе считаем фиксированным конечный набор переменных $\mathrm{Var} = \{P_1, \ldots, P_n\}$ и будем рассматривать лишь формулы от этих переменных.

Определение 1.65. Формула A называется *совершенной ДНФ*, если A — ДНФ и

- Каждая элементарная конъюнкция имеет вид $A_{\vec{x}} \rightleftharpoons \bigwedge_{i=1}^{n} P_i^{x_i}$ для некоторого $\vec{x} \in \mathbb{B}^n$.
- $A = \bigvee_{j=1}^{m} A_{\vec{x}_j}$, где $\vec{x}_1, \ldots \vec{x}_m \in \mathbb{B}^n$ попано различны и взяты в лексикографическом порядке.

Определение *совершенной КНФ* аналогично, с заменой дизъюнкций на конъюнкции и наоборот.

Замечание 1.66. Удобно расширить множество формул константами $\bot$ (ложь) и $\top$ (истина). Тем самым, формулами считаются и все выражения, построенные с помощью булевых связок из переменных и этих констант. Считаем $\bot$ совершенной ДНФ, а $\top$ — совершенной КНФ.

Замечание 1.67. Совершенные ДНФ и КНФ перестают быть совершенными, если рассматривать их как формулы от более широкого набора переменных. Поэтому имеет смысл говорить о совершенных ДНФ и КНФ лишь относительно некоторого фиксированного набора переменных.

Теорема 1.68. *Всякая формула A равносильна некоторой совершенной ДНФ.*

Доказательство (первый вариант). Если A тождественно ложна, в качестве её ДНФ можно взять $\bot$. В противном случае достаточно заметить, что формула, построенная в доказательстве теоремы о функциональной полноте для функции φ_A есть совершенная ДНФ. ⊠

Доказательство (второй вариант). Сначала приведём формулу к ДНФ. Удалим противоречивые конъюнкции, воспользовавшись равносильностями:

$$A \wedge \neg A \equiv \bot, \quad \bot \wedge A \equiv \bot, \quad \bot \vee A \equiv A.$$

При этом формула либо приводится к виду $\bot$, либо в формуле останутся лишь элементарные конъюнкции без вхождений пар противоположных литералов. В оставшихся конъюнкциях удалим повторы литералов с помощью равносильности $A \wedge A \equiv A$. Для каждой конъюнкции добавим недостающие до полного набора $P_1, \ldots, P_n$ переменные, пользуясь равносильностью

$$A \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B).$$

С помощью ассоциативности и коммутативности добьёмся требуемого упорядочения всех членов и правильной расстановки скобок. ⊠

Замечание 1.69. $(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \equiv A \wedge (B \vee \neg B) \equiv A \wedge \top \equiv A$.

Теорема 1.70. *Совершенные ДНФ эквивалентных формул (графически) совпадают.*

Доказательство. Для совершенной ДНФ каждая элементарная конъюнкция определяет некоторую выполняющую оценку, а сама ДНФ — множество всех таких оценок.

Следствие 1.71. *Совершенная ДНФ любой формулы A единственна.*

Аналогичные теоремы имеют место и для совершенных КНФ.

Упражнение 1.72. *Привести к совершенной конъюнктивной нормальной форме формулу $\neg(P \leftrightarrow Q)$. Ответ: $(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$.*

1.9.3 Полнота исчисления эквивалентностей[1]

Следующая теорема является простым аналогом теоремы о полноте исчисления высказываний, доказываемой ниже. Смысл этого результата в том, что мы сводим (без потери информации) проверку эквивалентности формул к чисто механическим символьным преобразованиям. Исчисление эквивалентностей, фигурирующее неявно в данной теореме — представитель класса так называемых *эквационалыных исчислений*, или *исчислений тождеств*, которые распостранены в алгебре.

Теорема 1.73. *Всякая равносильность $A \equiv B$ может быть выведена из основных равносильностей (данных в таблице) и дополнительных равносильнольностей для констант $\top$ и $\bot$*

$$A \wedge \neg A \equiv \bot, \quad A \vee \neg A \equiv \top$$

по правилу замены подформулы на эквивалентную и правилам

$$\frac{B \equiv A}{A \equiv B}, \quad \frac{A \equiv B \quad B \equiv C}{A \equiv C}.$$

[1] Необязательный материал.

Доказательство. По теореме о СДНФ равносильные формулы приводятся к графически равным СДНФ. При этом достаточно пользоваться лишь основными и дополнительными равносильностями и указанными правилами для вывода новых равносильностей (см. второй способ доказательства теоремы о СДНФ). Нам нужно лишь вывести следующие используемые в доказательстве теоремы о СДНФ равносильности для констант: $\bot \wedge A \equiv \bot$, $\bot \vee A \equiv A$, $A \wedge \top \equiv A$. Получаем:

- $A \wedge \bot \equiv A \wedge (A \wedge \neg A) \equiv (A \wedge A) \wedge \neg A \equiv A \wedge \neg A \equiv \bot$.
- $A \vee \bot \equiv A \vee (A \wedge \neg A) \equiv A$ по закону поглощения.
- $A \wedge \top \equiv A \wedge (A \vee \neg A) \equiv A$, аналогично.

Таким образом, от A к B можно перейти по цепочке эквивалентностей

$$A = A_0 \equiv A_1 \equiv \cdots \equiv A' = B' \equiv \cdots \equiv B_1 \equiv B_0 = B,$$

где A' и B' — СДНФ формул A и B, соответственно, а каждый переход $A_i \equiv A_{i+1}$ и $B_{i+1} \equiv B_i$ получается заменой некоторой подформулы на эквивалентную в соответствии с одной из известных нам основных или дополнительных эквивалентностей. ⊠

1.10 Другие варианты формальной семантики

1.10.1 Теоретико-множественная семантика

Пусть U — непустое множество; $\mathcal{P}(U)$ — множество всех его подмножеств.

Определение 1.74. *Оценкой* называется функция $f : \mathrm{Var} \to \mathcal{P}(U)$. *Значение* $f(A) \subseteq U$ формулы A при оценке f определяется индуктивно по правилам:

- $f(\neg A) \rightleftharpoons U \setminus f(A)$
- $f(A \wedge B) \rightleftharpoons f(A) \cap f(B)$
- $f(A \vee B) \rightleftharpoons f(A) \cup f(B)$
- $f(A \to B) \rightleftharpoons (U \setminus f(A)) \cup f(B)$

Замечание 1.75. Если взять $U = \{0\}$, теоретико-множественная семантика сводится к стандартной двузначной: Л $= \varnothing$, И $= U$.

Замечание 1.76. Если взять $U = \mathbb{R}^2$ и если для $P \in \mathrm{Var}$ $f(P)$ — круги на плоскости, получаем *диаграммы Венна*, известные из школы.

1.10.2 Алгебраическая семантика[2]

Определение 1.77. Множество **B** с заданными на нём константами 0, 1 и операциями $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, которые удовлетворяют равенствам

$$a \wedge \neg a = 0, \quad a \vee \neg a = 1$$

и равенствам, соответствующим таблице основных эквивалентностей, называется *булевой алгеброй.*

В таблице основных эквивалентностей заменяем $\equiv$ на $=$ и большие латинские буквы A, B, C (означающие произвольные формулы) на маленькие a, b, c (означающие элементы множества **B**), получаем список *тождеств булевой алгебры:*

$a \wedge b$	$=$	$b \wedge a$	$a \vee b$	$=$	$b \vee a$
$a \wedge (b \wedge c)$	$=$	$(a \wedge b) \wedge c$	$a \vee (b \vee c)$	$=$	$(a \vee b) \vee c$
$a \wedge a$	$=$	a	$a \vee a$	$=$	a
$a \wedge (b \vee c)$	$=$	$(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	$a \vee (b \wedge c)$	$=$	$(a \vee b) \wedge (a \vee c)$
$a \vee (a \wedge b)$	$=$	a	$a \wedge (a \vee b)$	$=$	a
$\neg(a \wedge b)$	$=$	$\neg a \vee \neg b$	$\neg(a \vee b)$	$=$	$\neg a \wedge \neg b$
$\neg\neg a$	$=$	a	$a \to b$	$=$	$\neg a \vee b$
$a \wedge \neg a$	$=$	0	$a \vee \neg a$	$=$	1

Примеры булевых алгебр.

- $\mathbb{B} \rightleftharpoons \{0, 1\}$;
- $\mathcal{P}(U)$ для любого U;
- $\mathrm{Fm}/{\equiv}$ (*алгебра Линденбаума*), то есть множество классов равносильных формул с синтаксически определёнными операциями $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\neg$. Более формально, если $[A]$ обозначает класс эквивалентности формулы A, то операция $\wedge$ на классах определяется следующим образом: $[A] \wedge [B] \rightleftharpoons [A \wedge B]$, и аналогично определены остальные операции. Лемма **??** гарантирует корректность этих определений.

Определение 1.78. *Оценкой* на булевой алгебре называется функция $f : \mathrm{Var} \to \mathbf{B}$. *Значение* $f(A) \in \mathbf{B}$ формулы A при оценке f вычисляется в соответствии с заданными на **B** операциями, в частности $f(A \wedge B) = f(A) \wedge f(B)$ и т.д.

[2] Необязательный материал.

Непосредственно следует из определений следует

Лемма 1.79. *Для любой оценки* $f : \mathrm{Var} \to \boldsymbol{B}$ *на булевой алгебре, если* $A \equiv B$ *— одна из основных или дополнительных эквивалентностей, то* $f(A) = f(B)$ *в* $\boldsymbol{B}$.

Следующая теорема показывает, что каждая из указанных семантик задаёт одно и то же множество тавтологий.

Теорема 1.80. *Для любого множества* U *и любой булевой алгебры* $\boldsymbol{B}$ *равносильны следующие утверждения.*

(i) A *— тавтология;*

(ii) $f(A) = U$ *для любой оценки* $f : \mathrm{Var} \to \mathcal{P}(U)$*;*

(iii) $f(A) = 1$ *для любой оценки* $f : \mathrm{Var} \to \boldsymbol{B}$.

Доказательство. Утверждение (iii) влечёт (i), поскольку если $f : \mathrm{Var} \to \mathbb{B}$ — оценка, при которой $f(A) = \text{Л}$, мы можем определить соответствующую оценку $f' : \mathrm{Var} \to \mathbf{B}$ на булевой алгебре $\mathbf{B}$ отождествляя И с $1 \in \mathbf{B}$ и Л с $0 \in \mathbf{B}$. При этом для любой формулы C имеем

$$f(C) = \text{И} \iff f'(C) = 1$$

и тем самым $f'(A) = 0$. Аналогично, (ii) влечёт (i).

Докажем, что (i) влечёт (iii). Допустим, что A тавтология. По теореме о полноте исчисления эквивалентностей, равносильность $A \equiv \top$ выводится из основных и дополнительных эквивалентностей по известным правилам. Индукцией по длине цепочки вывода $A \equiv \top$ на основе леммы 1.79 легко установить, что $f(A) = f(\top) = 1$ при любой оценке f.

Отметим, что (i) влечёт (ii) поскольку $\mathcal{P}(U)$ есть булева алгебра. ⊠

2 Исчисление высказываний

В этом разделе буквы A, B и т. д. обозначают формулы логики высказываний, а буквы Γ, Δ и т. д. обозначают множества формул логики высказываний.

2.1 Аксиомы и правила вывода исчисления высказываний

Определение 2.1. *Классическое исчисление высказываний* задаётся следующими аксиомами и правилами вывода:

Аксиомы:

1. $A \to (B \to A)$,
2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$,
3. $A \wedge B \to A$,
4. $A \wedge B \to B$,
5. $A \to (B \to A \wedge B)$,
6. $A \to A \vee B$,
7. $B \to A \vee B$,
8. $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$,
9. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$,
10. $\neg\neg A \to A$.

Правило вывода: $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$ (*modus ponens*, MP).

Определение 2.2. *Выводом в исчислении высказываний* (или просто *выводом*) называется конечная последовательность формул, каждая из которых является аксиомой или получается из некоторых предыдущих формул по правилу вывода.

Пример 2.3. Следующая последовательность формул является выводом:

$$
\begin{array}{ll}
P \to Q \vee P & \\
Q \to Q \vee P & \\
(P \to Q \vee P) \to ((Q \to Q \vee P) \to (P \vee Q \to Q \vee P)) & \\
(Q \to Q \vee P) \to (P \vee Q \to Q \vee P) & \text{(MP)} \\
P \vee Q \to Q \vee P & \text{(MP).}
\end{array}
$$

Определение 2.4. Формула A называется *выводимой* в исчислении высказываний или *теоремой* исчисления высказываний (обозначение $\vdash A$), если существует вывод, в котором последняя формула есть A.

Пример 2.5. $\vdash P \vee Q \to Q \vee P$.

Пример 2.6. $\vdash A \to A$.

Доказательство. В аксиоме 2 возьмём $B = (A \to A)$ и $C = A$.

$$\begin{array}{ll}
(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A)) & \\
A \to ((A \to A) \to A) & \\
(A \to (A \to A)) \to (A \to A) & \text{(MP)} \\
A \to (A \to A) & \\
A \to A & \text{(MP).}
\end{array}$$

$\boxtimes$

2.2 Выводимость из гипотез

Определение 2.7. Пусть Γ — некоторое множество формул. *Выводом из* Γ называется конечная последовательность формул, каждая из которых либо принадлежит множеству Γ, либо является аксиомой, либо получается из предыдущих формул по правилу вывода. Элементы множества Γ называются *гипотезами*.

Пример 2.8. Следующая последовательность формул является выводом из множества гипотез $\{P \land Q\}$:

$$\begin{array}{ll}
P \land Q & \text{(гипотеза)} \\
P \land Q \to P & \\
P & \text{(MP)} \\
P \land Q \to Q & \\
Q & \text{(MP)} \\
Q \to (P \to Q \land P) & \\
P \to Q \land P & \text{(MP)} \\
Q \land P & \text{(MP).}
\end{array}$$

Определение 2.9. Формула A называется *выводимой из множества формул* Γ (обозначение $\Gamma \vdash A$), если существует вывод из Γ, в котором последняя формула есть A.

Замечание 2.10. Вместо $\{B_1, \dots, B_n\} \vdash A$ обычно пишут $B_1, \dots, B_n \vdash A$. Выражение $\Gamma \vdash A, B$ означает $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \vdash B$.

Пример 2.11. $P \land Q \vdash Q \land P$.

Замечание 2.12. Выводимость из гипотез обладает следующими простыми свойствами.

- Если $\Delta \subseteq \Gamma$ и $\Delta \vdash A$, то $\Gamma \vdash A$ (*монотонность*).
- Если $\Gamma \vdash A$, то существует такое конечное множество $\Delta \subseteq \Gamma$, что $\Delta \vdash A$ (*компактность*).
- Если $\Gamma \vdash A$ и для каждой формулы $B \in \Gamma$ имеет место $\Delta \vdash B$, то $\Delta \vdash A$ (*транзитивность*).

2.3 Корректность исчисления высказываний

Предложение 2.13 (корректность). *Всякая выводимая формула является тавтологией.*

Доказательство. Теорема доказывается индукцией по длине вывода формулы A. ⊠

Аналогично доказывается несколько более общее утверждение, связывающее синтаксическое и семантическое отношения следования.

Предложение 2.14. *Если* $\Gamma \vdash A$, *то* $\Gamma \vDash A$.

2.4 Теорема о дедукции для исчисления высказываний

Следующая теорема существенно упрощает построение выводов в исчислении высказываний.

Теорема 2.15 (о дедукции). *Если* $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$, *то* $\Gamma \vdash (A \to B)$.

Доказательство. Теорема доказывается индукцией по длине вывода формулы B из множества гипотез $\Gamma \cup \{A\}$.

Если B является аксиомой или принадлежит Γ, то искомый вывод выглядит так:

$$\begin{array}{ll} B & \\ B \to (A \to B) & \\ (A \to B) & \qquad \text{(MP).} \end{array}$$

Если B совпадает с A, то используем пример 2.6.

Если B получена из некоторых предыдущих формул по правилу вывода modus ponens, то эти формулы имеют вид C и $C \to B$. Согласно предположению индукции $\Gamma \vdash (A \to C)$ и $\Gamma \vdash (A \to (C \to B))$. Искомый вывод формулы B из множества гипотез $\Gamma \cup \{A\}$ состоит из этих двух выводов и следующих формул:

$$\begin{array}{ll} (A \to C) \to ((A \to (C \to B)) \to (A \to B)) & \\ (A \to (C \to B)) \to (A \to B) & \qquad \text{(MP)} \\ A \to B & \qquad \text{(MP).} \end{array}$$

⊠

Замечание 2.16. Вместо $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ обычно пишут $\Gamma, A \vdash B$.

Пример 2.17. Из примера 2.11 и теоремы 2.15 следует, что $\vdash P \wedge Q \to Q \wedge P$.

Следствие 2.18. *Пусть* Γ *— некоторое множество формул. Тогда* $\Gamma \vdash (A \to B)$ *в том и только том случае, когда* $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$.

Доказательство. Достаточность доказана в теореме 2.15. Необходимость доказывается одним применением правила modus ponens. ⊠

2.5 Полезные выводимые правила

Приведём несколько полезных примеров выводимых правил, обосновываемых с помощью теоремы о дедукции.

Пример 2.19. (*силлогизм*) $A \to B, B \to C \vdash A \to C$.

Доказательство. Дважды по правилу modus ponens выводим

$$A, A \to B, B \to C \vdash C.$$

Отсюда получаем требуемое по теореме о дедукции. ⊠

Пример 2.20. (*контрапозиция*) $A \to B \vdash \neg B \to \neg A$.

Доказательство. По модулю теоремы о дедукции достаточно вывести $A \to B,\ \neg B \vdash \neg A$. Строим следующий вывод:

$$\begin{array}{ll}
A \to B & \\
\neg B & \\
(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A) & \\
(A \to \neg B) \to \neg A & \text{(MP)} \\
\neg B \to (A \to \neg B) & \\
A \to \neg B & \text{(MP)} \\
\neg A & \text{(MP).}
\end{array}$$

⊠

Пример 2.21. (*ex falso*) $A, \neg A \vdash B$.

> ex falso sequitur quodlibet (лат.) «из ложного следует всё, что угодно»

Доказательство. Выводим, опираясь на аксиомы 1 (дважды), 9 и 10:

$$A, \neg A \vdash \neg B \to A, \neg B \to \neg A \vdash \neg\neg B \vdash B.$$

⊠