Определение 1. 1. $\Sigma^* = \{w = a_1 \dots a_n | \forall i : a_i \in \Sigma\}$

2. В свободной группе существует и единственная нормальная форма элемента.

Определение 2. Конечный автомат- это пятёрка $< Q, \Sigma, \Delta, I, F >$, где Σ- конечный алфавит, Δ, Q- конечные множества, $\Delta \subset Q \times \Sigma^* \times Q$, $I \subseteq Q$, $F \subseteq Q$. Элементы Q называются состояниями, элементы I- начальными состояниями, элементы F-заключительными состояниями. Если $< p, x, q > \in \Delta$ то $< p, x, q >$ называется переходом из состояния p в q, а слово x- меткой перехода.

Определение 3. Слово $w \in \Sigma^*$ допускается конечным автоматом, если оно является меткой некоторого успешного (начинается в I и заканчивается в F) пути.

Определение 4. Язык, распознаваемый конечным автоматом M ($L(M)$) - это множество всех слов состоящее из меток всех успешных путей.

Задача 1. *Покажите, что если ограничить $|I| = 1$ и $|F| = 1$ (т.е. смотрим те автоматы, финальные и инициализирующие состояния которых состоят из одного состояния) то множество языков задаваемых такими конечными автоматами не изменится.*

Задача 2. *Аналогичный вопрос для конечных автоматов любой переход в которых состоит из одного элемента Σ.*

Задача 3. *Докажите, что множество языков заданных конечными автоматами замкнуто относительно естественных операций:*

1. $L_1 \cup L_2$
2. $L_1 \cap L_2$
3. L_1^*
4. $L_1 \cdot L_2 \equiv \{w \in \Sigma^* | \exists x \in L_1, y \in L_2 : w = xy\}$

Определение 5. Конечный автомат
$< Q, \Sigma, \Delta, I, F >$ называется детерминированным (deterministic), если:

- множество I содержит ровно один элемент
- для каждого перехода
  $< p, x, q > \in \Delta$ выполняется равенство $|x| = 1$
- для любого символа $a \in \Sigma$ и для любого состояния $p \in Q$ существует не более одного состояния $q \in Q$ со свойством $< p, a, q > \in \Delta$

Определение 6. Детерминированный конечный автомат $< Q, \Sigma, \Delta, I, F >$ называется полным (complete), если для каждого состояния $p \in Q$ и для каждого символа $a \in \Sigma$ найдётся такое состояние $q \in Q$, что
$< p, a, q > \in \Delta$

Теорема 1. *Каждый автоматный язык распознаётся некоторым полным детерминированным конечным автоматом.*

Задача 4. *Докажите, что для любого гомоморфизма $h : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ (относительно опреации конкатенация), и для любых автоматных языков $L_1 \subseteq \Sigma_1, L_2 \subseteq \Sigma_2$ языки $h(L_1)$ и $h^{-1}(L_2)$ будут автоматными.*

Определение 7. Пусть дано множество Pr примитивных типов. Определим BTp индуктивно:

- $Pr \subseteq BTp$;
- если $A \in BTp$ и $q \in Pr$, то $(A/q) \in BTp$ и $(q\backslash A) \in BTp$.

Определение 8. Базовая категориальная грамматика (в дальнейшем БКГ) есть тройка $G = \langle \Sigma, r, \triangleright \rangle$, где Σ — конечный алфавит, $r \in Pr$ (r называется результирующим типом) и $\triangleright$ — произвольное конечное бинарное соответствие $\triangleright \subset \Sigma \times BTp$, сопоставляющее каждой букве алфавита один или несколько синтаксических типов. Слово $a_1 \dots a_n$ порождается БКГ G, если существуют такие типы $B_1, \dots, B_n \in BTp$, что для любого $i \leq n$ выполняется $a_i \triangleright B_i$ и последовательность $B_1, \dots, B_n$ может быть приведена к r цепочкой преобразований вида:

$$A/q, q \to A \qquad \text{и} \qquad q, q\backslash A \to A.$$

Язык, задаваемый БКГ G, определяется как множество всех непустых слов $a_1 ... a_n$ в алфавите Σ, порождаемых грамматикой G.

Задача 5. *Докажите, что любой язык распознаваемый конечным автоматом может быть задан некоторой БКГ.*

Задача 6. *Если в правила преобразований добавить перестановку:*

$$A, B \to B, A$$

какой язык будет порождать грамматика $a \triangleright (r/r)/r$, $b \triangleright r$.

Задача 7. *Являются ли следующие языки автоматными:*

- $\{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$
- $\{a^{(n^2)} | n \in \mathbb{N}\}$
- *язык из предыдущей задачи*

Задача 8. *Приведите пример языка заданного БКГ, но не являющегося автоматным.*

Задача 9. *Если от БКГ потребовать, чтобы $\triangleright$ было функциональным отношением. Можно ли задать языки: ab^*, $a^n b^n$ (Подсказка: придумайте естественное отображение из строк категорий в группы).*