Программа курса “Введение в математическую логику”, 20.12.00

1. Элементы теории множеств

1. Равномощность множеств. Свойства счетных множеств.
2. Сравнение мощностей. Теорема Кантора — Бернштейна
3. Теорема Кантора $|P(A)| > |A|$.
4. Частично упорядоченные множества, линейно упорядоченные множества, вполне упорядоченные множества, начальные отрезки и их свойства.
5. Трансфинитная индукция и трансфинитная рекурсия.
6. Теорема о сравнении вполне упорядоченных множеств
7. Аксиома выбора. Теорема Цермело.
8. Лемма Цорна.
9. Равенства $|A| + |A| = |A| \times |A| = |A|$ для бесконечных множеств A.

2. Пропозициональная логика.

10. Пропозициональные формулы.
11. Таблица истинности формулы. Возможность представления любой булевой функции некоторой формулой. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы. Эквивалентные формулы, выполнимые формулы и тавтологии.
12. Исчисление высказываний (ИВ) (аксиомы, правила вывода, понятие выводимой формулы из данного множества формул)
13. Вывод формулы $A \to A$
14. Лемма о дедукции для ИВ
15. Выводы в ИВ
16. Лемма о таблице истинности: $\neg_{\varepsilon_1} x_1, \neg_{\varepsilon_2} x_2, \ldots, \neg_{\varepsilon_n} x_n \vdash \neg_\varepsilon A$, где $\neg_1 A = A$, $\neg_0 A = \neg A$, а ε есть значение формулы A, если ее переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принимают значения $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ соответственно.
17. Теорема о полноте ИВ

3. Логика первого порядка

18. Определение формулы данной сигнатуры
19. Интерпретации данной сигнатуры
20. Понятие истинности формулы в данной интерпретации.
21. Выразимые в данной интерпретации предикаты. Доказательства невыразимости с помощью автоморфизмов.
22. Элиминация кванторов в интерпретации $\langle \mathbb{Z}, S, = \rangle$ (или в интерпретации $\langle \mathbb{Z}, 0, S, = \rangle$). Невыразимость отношения “быть меньше” в этой интерпретации.
23. Исчисление предикатов (ИП): аксиомы, правила вывода. Допустимость применения правила обобщения.
24. Теорема о корректности исчисления предикатов. Теорема Геделя о полноте (без доказательства).
25. Примеры выводов в исчислении предикатов: вывод формул $\exists y \forall x \phi \to \forall x \exists y \phi$, $\forall x A(x) \to \forall y A(y)$, $\exists x A(x) \to \exists y A(y)$ (где A — одноместный предикатный символ), $\neg \forall x \phi \leftrightarrow \exists x \neg \phi$, $\neg \exists x \phi \leftrightarrow \forall x \neg \phi$.

26. Теорема о том, что замена любой подформулы на доказуемо эквивалентную формулу даёт доказуемо эквивалентную формулу.
27. Аксиомы равенства. Теорема о корректности исчисления предикатов с равенством. Теорема Геделя о полноте для исчисления предикатов с равенством (без доказательства).
28. Выводимость из посылок для исчисления предикатов. Свойства этого понятия.
29. Понятие теории, модели теории, непротиворечивости и совместности теорий. Теорема Гёделя о полноте в сильной форме (без доказательства).

Литература

[1] Н. Верещагин, А. Шень. Математическая логика и теория алгоритмов. Начала теории множеств. Москва: изд-во МЦНМО, 1999.

[2] Н. Верещагин, А. Шень. Математическая логика и теория алгоритмов. Исчисления и языки. Москва: изд-во МЦНМО, 2000.

Краткие (40 стр.) конспекты лекций в postscript формате и в формате для печати на принтерах Laser Jet фирмы Hewlett Packard с разрешением 600dpi доступны по Интернет в `http://lpcs.math.msu.ru/~ver`