Математическая логика и алгоритмы. Программа курса 2015 года.

Н.К. Верещагин

1 Повторение части того, что было на лекциях А.Л.Семенова

1. Язык логики предикатов: сигнатуры, термы, формулы. Теории первого порядка (семантический подход): структуры и модели теорий, семантическое следование (истинность во всех моделях теории), нормальные модели. Расширение сигнатуры с помощью введения новых предикатов, констант и функциональных символов.
2. Исчисление предикатов: аксиомы, правила вывода, производные правила. Теории первого порядка (дедуктивный подход): аксиомы и теоремы теории, непротиворечивые теории, полные теории. Теорема корректности исчисления предикатов: любая теорема теории истинна во всех её моделях.

2 Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов и её доказательство

1. Формулировка теоремы Гёделя о полноте исчисления предикатов: если формула истинна во всех моделях теории, то она является теоремой теории (эквивалентность семантического и дедуктивного подходов). Вывод этой теоремы из ее частного случая — существования модели непротиворечивой теории.
2. Доказательство теоремы Гёделя о полноте исчисления предикатов: Теорема Линденбаума о пополнении непротиворечивой теории. Экзистенциально полные теории. Теорема о существовании полного и экзистенциально полного расширения любой непротиворечивой теории (для

счетных сигнатур). Теорема о существовании модели полной и экзистенциально полной теории.
3. Теорема Гёделя о полноте для исчисления предикатов с равенством (относительно класса нормальных моделей).

3 Аксиоматическая теория множеств Цермело–Френкеля ZF

1. Наивная теория множеств Кантора и её противоречивость. Аксиомы теории множеств Цермело–Френкеля (пока без аксиомы бесконечности). Доказательство существования объединения, пересечения и разности множеств.
2. Определение упорядоченной пары по Куратовскому и вывод основного свойства пары. Отношения и функции. Доказательство существования декартова произведения двух множеств и области определения и множества значений функции.
3. Индуктивные множества и аксиома бесконечности. Определение натурального числа и существование множества натуральных чисел. Проверка аксиом Пеано. Конечные и бесконечные последовательности натуральных чисел. Рекурсивные определения. Определение сложения и умножения натуральных чисел.
4. Определение ординалов. Натуральные числа являются ординалами. Лемма о минимальном ординале. Лемма о сравнимости любых двух ординалов. Свойства порядка на ординалах. Вполне упорядоченность любого ординала отношением принадлежности. Существование ординала, большего всех ординалов из данного множества. Последователи и предельные ординалы.
5. Трансфинитная индукция. Определения по трансфинитной индукции (трансфинитная рекурсия). Построение изоморфизма между данным вполне упорядоченным множеством и некоторым ординалом.
6. Аксиома выбора. Теорема Цермело и ее доказательство в ZFC. Лемма Цорна и её доказательство в ZFC.
7. Кардиналы и определение мощности множества (в ZFC). Натуральные числа и множество натуральных чисел являются кардиналами. Сложение ординалов и кардиналов.

8. Представимые в ZF функции и предикаты. Формула, представляющая предикат "x есть доказательство y". Формула доказуемости и формула непротиворечивости ZF (утверждение о непротиворечивости ZF).
9. Принцип отражения в ZF.
10. Первая теорема Гёделя о неполноте для ZF: если ZF непротиворечива, то существует невыводимая в ZF формула, утверждение о невыводимости которой не доказуемо в ZF. Вторая теорема Гёделя о неполноте для ZF: если ZF непротиворечива, то утверждение о её непротиворечивости невыводимо в ZF.
11. Аксиомы Бернайса. Вывод второй теоремы о неполноте из аксиом Бернайса и принципа отражения.

4 Арифметика Пеано (формальная арифметика)

1. Аксиомы арифметики Пеано, как теории первого порядка. Выводы таблиц сложения и умножения. Доказательство основных свойств сложения и умножения. Определение порядка и доказательство его свойств.
2. Бета-функция Гёделя $\beta(u, v, x)$ и её свойства. Представимость функций и предикатов в PA. Представимость возведения в степень с помощью формулы формальной арифметики. Вывод в арифметике Пеано утверждения о существовании и единственности такого y, для которого $\beta(u, v, x) = y$.
3. Принцип свёртывания: если для всех $x < n$ существует единственное y, для которого $A(x, y)$, то найдутся u, v такие, что $\beta(u, v, x)$ равно этому y для всех $x < n$ (где A — некоторая арифметическая формула). Вывод принципа свёртывания в формальной арифметике. Финитные доказательства и тезис арифметичности (любая финитно доказуемая арифметическая формула выводима в PA).
4. Первая и вторая теоремы Гёделя о неполноте для формальной арифметики.

5 Теории некоторых структур: аксиоматизация и разрешимость

1. Разрешимость и аксиоматизация теории целых чисел в сигнатуре ($=$, $x+1$).
2. Разрешимость и аксиоматизация теории упорядоченного множества действительных чисел.
3. Разрешимость и аксиоматизация теории поля комплексных чисел.
4. Разрешимость и аксиоматизация теории упорядоченного поля действительных чисел (теорема Зайденберга-Тарского).

Список литературы

[1] Н. Верещагин, А. Шень. Математическая логика и теория алгоритмов. Начала теории множеств. Москва: изд-во МЦНМО, 1999.

[2] Н. Верещагин, А. Шень. Математическая логика и теория алгоритмов. Исчисления и языки. Москва: изд-во МЦНМО, 2000.

[3] Дж. Шёнфилд. Математическая логика. М. Наука, 1975.

[4] Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М. Наука, 1971.