Задачи по курсу “Математическая логика и алгоритмы”

16 мая 2015 г.

Срок сдачи — 27 февраля

1. Привести пример общезначимой (то есть, истинной в любой структуре) замкнутой формулы $\exists x\ A(x)$ такой, что формула $\forall x\ A(x)$ не общезначима. Формула не должна содержать знака равенства.

2. Является ли теория с аксиомами $\exists x\ P(x), \exists x\ Q(x), \exists x\,\neg P(x), \exists x\,\neg\, Q(x)$ семантически полной (сигнатура состоит из двух одноместных предикатных символов P, Q)?

Срок сдачи — 6 марта

3. Привести пример общезначимых (то есть, истинных в любой структуре) замкнутых формул $\exists x\, A(x)$ и $\exists x\, B(x)$ таких, что формула $\exists x\,(A(x) \wedge B(x))$ не общезначима. Формулы не должны содержать знака равенства.

4. Доказать выводимость в исчислении предикатов (с использованием леммы о дедукции, но без использования теоремы Гёделя о полноте) формулы $\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\exists x P(x) \to \exists x Q(x))$.

Срок сдачи — 13 марта

5. Определим $S(x) = x \cup \{x\}$. Докажите, что из аксиом ZF (семантически) следует, что все множества $\emptyset$, $S(\emptyset)$, $S(S(\emptyset))$, $\ldots$ попарно различны. Докажите, что любая модель теории ZF (без аксиомы бесконечности) бесконечна.

6. Докажите, что из аксиом ZF (семантически) следует, что все множества $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, $\ldots$ попарно различны.

Срок сдачи — 20 марта

7. Докажите, что любой элемент любого ординала является ординалом.

8. Докажите, что ординал α принадлежит ординалу β тогда и только тогда, когда α есть собственное подмножество β.

9. Докажите, что для любого ординала α ординал $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ непосредственно следует за α в линейном порядке на ординалах (то есть, в промежутке между α и $S(\alpha)$ ничего нет).

Срок сдачи — 27 марта

10. Докажите в ZF, что для любых двух множеств существует их декартово произведение.

11. Напишите формулу языка теории множеств с тремя свободными переменными, задающую умножение двух натуральных чисел. Сформулируйте ее основные свойства и докажите, что в теории множеств эти свойства доказуемы.

Срок сдачи — 3 апреля

12. Докажите в ZF, что для любого вполне упорядоченного множества найдется взаимно-однозначное соответствие между этим множеством и некоторым ординалом, которое сохраняет порядок.

13. Докажите в ZF, что такой ординал и такое соответствие еднаственны.

Срок сдачи — 10 апреля

14. Докажите в ZF, что любое натуральное число и множество всех натуральных чисел являются кардиналами.

15. Докажите в ZFC, что для каждого кардинала есть больший него кардинал.

16. Докажите то же самое в ZF.

Срок сдачи — 17 апреля

17. Докажите в ZF, что для любого множества кардиналов имеется кардинал, больший всех кардиналов этого множества.

mallskip

18. Постройте формулу, осуществляющую взаимно однозначное оответствие между классом всех ординалов и классом всех кардиналов.

Срок сдачи — 24 апреля

19. Пусть “формула доказуемости” $\mathrm{Prf}(x, y)$ записана так, что оператор доказуемости $\Box A$, определённый как $\exists x\ \mathrm{Prf}(x, \bar{A})$, удовлетворяет аксиомам Бернайса

(1) если $\mathrm{ZF} \vdash A$, то $\mathrm{ZF} \vdash \Box A$;
(2) $\mathrm{ZF} \vdash (\Box A \to \Box\Box A)$;
(3) $\mathrm{ZF} \vdash (\Box A \wedge \Box(A \to B) \to \Box B)$.

Докажите, что для этого оператора доказуемости вторая теорема Геделя для ZF доказуема в теории множеств, то есть, $\mathrm{ZF} \vdash (\Box\neg\Box\bot \to \Box\bot)$.

20. Предположим, что теория множеств непротиворечива. Пусть формула доказуемости $\mathrm{Prf}'(x, y)$ получена из обычной формулы доказуемости $\mathrm{Prf}(x, y)$ добавлением условия $y \neq \bar{\bot}$: $\mathrm{Prf}'(x, y) = (\mathrm{Prf}(x, y) \wedge \neg y = \bar{\bot})$. Определим оператор доказуемости $\Box' A$ с помощью этой формулы: $\Box' A = (\exists x\ (\mathrm{Prf}(x, \bar{A}) \wedge \neg\bar{A} = \bar{\bot}))$. Проверьте, что в теории множеств доказуемо утверждение $\neg\Box'\bot$. Какой из аксиом Бернайса не удовлетворяет оператор $\Box'$?

Срок сдачи — 8 мая

21. Докажите, что если теория ZF непротиворечива, то она неразрешима (то есть, не существует алгоритма, который по любой данной ему формуле

выясняет, выводима ли эта формула). Без доказательства можно пользоваться представимостью в ZF любого разрешимого предиката.

22. Докажите, что в PA выводима формула $x \cdot y = y \cdot x$.

Срок сдачи — 15 мая

23. Докажите, что функция $2x + 1$ представима в PA.

24. Докажите, что функция 2^x представима в PA.

Срок сдачи — 22 мая

25. Найдите бескванторную формулу, эквивалентную в поле комплексных чисел формуле $\exists x\,(x^3 + y_2x^2 + y_1x + y_0 = 0 \ \wedge\ z_2x^2 + z_1x + z_0 \neq 0)$.

26. Найдите бескванторную формулу, эквивалентную в упорядоченном поле действительных чисел формуле $\exists x\,(0 < x < 1 \wedge x^3 + y_2x^2 + y_1x + y_0 = 0)$.