Математическая логика и алгоритмы. Программа экзамена 2015 года.

Н.К. Верещагин

1 Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов и её доказательство

1. Формулировка теоремы Гёделя о полноте исчисления предикатов: если формула истинна во всех моделях теории, то она является теоремой теории (эквивалентность семантического и дедуктивного подходов). Лемма о дедукции. Вывод этой теоремы из ее частного случая — существования модели непротиворечивой теории.
2. Доказательство теоремы Гёделя о полноте исчисления предикатов: Теорема Линденбаума о пополнении непротиворечивой теории. Экзистенциально полные теории. Теорема о существовании полного и экзистенциально полного расширения любой непротиворечивой теории (для счетных сигнатур). Теорема о существовании модели полной и экзистенциально полной теории.
3. Теорема Гёделя о полноте для исчисления предикатов с равенством (относительно класса нормальных моделей).

2 Аксиоматическая теория множеств Цермело–Френкеля ZF

4. Аксиомы теории множеств Цермело–Френкеля. Доказательство существования объединения, пересечения и разности множеств.
5. Определение упорядоченной пары по Куратовскому и вывод основного свойства пары. Отношения и функции. Доказательство существования

декартова произведения двух множеств. Определение функций с помощью формул (по аксиоме замены). Функционалы.
6. Определение ординалов. Лемма о минимальном ординале. Теорема о сравнимости любых двух ординалов. Вполне упорядоченность любого ординала отношением принадлежности. Существование ординала, большего всех ординалов из данного множества. Последователи и предельные ординалы.
7. Определение натуральных чисел как ординалов, меньших любого предельного ординала. Существование множества натуральных чисел. Проверка аксиом Пеано. Конечные и бесконечные последовательности натуральных чисел. Рекурсивные определения функций на натуральных числах. Определение сложения и умножения натуральных чисел.
8. Трансфинитная индукция. Определения по трансфинитной индукции (трансфинитная рекурсия). Построение изоморфизма между данным вполне упорядоченным множеством и некоторым ординалом.
9. Аксиома выбора. Теорема Цермело и ее доказательство в ZFC. Лемма Цорна и её доказательство в ZFC.
10. Кардиналы и определение мощности множества (в ZFC). Сложение ординалов и кардиналов. Теорема о том, что сумма и произведение двух бесконечных кардиналов равны наибольшему из них.
11. Представимые в ZF функции и предикаты. Формула, представляющая предикат "x есть доказательство y". Формула доказуемости и формула непротиворечивости ZF (утверждение о непротиворечивости ZF).
12. Принцип отражения в ZF.
13. Первая теорема Гёделя о неполноте для ZF: если ZF непротиворечива, то существует невыводимая в ZF формула, утверждение о невыводимости которой не доказуемо в ZF. Первая теорема Гёделя о неполноте ZF в форме Россера. Вторая теорема Гёделя о неполноте для ZF: если ZF непротиворечива, то утверждение о её непротиворечивости невыводимо в ZF.

3 Арифметика Пеано (формальная арифметика)

14. Аксиомы арифметики Пеано, как теории первого порядка. Доказательство основных свойств сложения и умножения. Определение порядка

и доказательство его свойств.
15. Бета-функция Гёделя $\beta(u, v, x)$ и её свойства. Представимость функций и предикатов в PA. Вывод в арифметике Пеано утверждения о существовании и единственности такого y, для которого $\beta(u, v, x) = y$.
16. Принцип свёртывания: если для всех $x < n$ существует единственное y, для которого $A(x, y)$, то найдутся u, v такие, что $\beta(u, v, x)$ равно этому y для всех $x < n$ (где A — некоторая арифметическая формула). Вывод принципа свёртывания в формальной арифметике. Финитные доказательства и тезис арифметичности (любая финитно доказуемая арифметическая формула выводима в PA).
17. Первая и вторая теоремы Гёделя о неполноте для формальной арифметики.

4 Теории некоторых структур: аксиоматизация и разрешимость

18. Элиминация кванторов, разрешимость и аксиоматизация элементарной теории поля комплексных чисел.
19. Элиминация кванторов, разрешимость и аксиоматизация элементарной теории упорядоченного поля действительных чисел (теорема Зайденберга-Тарского).

Список литературы

[1] Н. Верещагин, А. Шень. Математическая логика и теория алгоритмов. Начала теории множеств. Москва: изд-во МЦНМО, 1999.

[2] Н. Верещагин, А. Шень. Математическая логика и теория алгоритмов. Исчисления и языки. Москва: изд-во МЦНМО, 2000.

[3] Дж. Шёнфилд. Математическая логика. М. Наука, 1975.