Математическая логика и алгоритмы
Программа курса 2013

Н.К. Верещагин

1 Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов

1. Теорема Линденбаума о пополнении непротиворечивой теории. Экзистенциально полные теории. Теорема о существовании полного и экзистенциально полного расширения любой непротиворечивой теории (для счетных сигнатур).
2. Теорема о существовании модели полной и экзистенциально полной теории.

2 Аксиоматическая теория множеств Цермело–Френкеля ZF

3. Наивная теория множеств Кантора и её противоречивость. Аксиомы теории множеств Цермело–Френкеля. Доказательство существования объединения, пересечения и разности множеств.
4. Определение упорядоченной пары по Куратовскому и вывод основного свойства пары. Отношения и функции. Доказательство существования декартова произведения двух множеств и области определения и множества значений функции.
5. Определение натурального числа и существование множества натуральных чисел. Проверка аксиом Пеано. Рекурсивные определения. Определение сложения и умножения натуральных числел.

6. Определение ординалов. Натуральные числа являются ординалами. Лемма о минимальном ординале. Лемма о сравнимости любых двух ординалов. Свойства порядка на ординалах. Вполне упорядоченность любого ординала отношением принадлежности. Существование ординала, большего всех ординалов из данного множества. Последователи и предельные ординалы.
7. Трансфинитная индукция. Определения по трансфинитной индукции (трансфинитная рекурсия). Построение изоморфизма между данным вполне упорядоченным множеством и некоторым ординалом.
8. Аксиома выбора. Теорема Цермело и ее доказательство в ZFC. Лемма Цорна и её доказательство в ZFC.
9. Кардиналы и определение мощности множества (в ZFC). Натуральные числа и множество натуральных чисел являются кардиналами. Сложение ординалов и кардиналов.
10. Представление конкретных натуральных чисел и конкретных конечных последовательностей натуральных чисел в ZF. Представимые в ZF функции и предикаты. Формула, представляющая предикат “x есть доказательство y”. Формула доказуемости и формула непротиворечивости ZF (утверждение о непротиворечивости ZF).
11. Принцип отражения в ZF.
12. Первая теорема Гёделя о неполноте для ZF: если ZF непротиворечива, то существует невыводимая в ZF формула, утверждение о невыводимости которой не доказуемо в ZF. Вторая теорема Гёделя о неполноте для ZF: если ZF непротивеоречива, то утверждение о её непротиворечивости невыводимо в ZF.
13. Аксиомы Бернайса. Вывод второй теоремы о неполноте из аксиом Бернайса и принципа отражения.

3 Арифметика Пеано (формальная арифметика)

14. Аксиомы арифметики Пеано, как теории первого порядка. Выводы таблиц сложения и умножения. Доказательство основных свойств сложения и умножения. Определение порядка и доказательство его свойств.
15. Бета-функция Гёделя $\beta(u, v, x)$ и её свойства. Представимость функций и предикатов в PA. Представимость возведения в степень с помо-

щью формулы формальной арифметики. Вывод в арифметике Пеано утверждения о существовании и единственности такого y, для которого $\beta(u, v, x) = y$.
16. Принцип свёртывания: если для всех $x < n$ существует единственное y, для которого $A(x, y)$, то найдутся u, v такие, что $\beta(u, v, x)$ равно этому y для всех $x < n$ (где A — некоторая арифметическая формула). Вывод принципа свёртывания в формальной арифметике. Финитные доказательства и тезис арифметичности (любая финитно доказуемая арифметическая формула выводима в PA).
17. Первая и вторая теоремы Гёделя о неполноте для формальной арифметики.

4 Элементарные теории интерпретаций: аксиоматизация и разрешимость

18. Элиминация кванторов в элементарной теории целых чисел с операцией добавления единицы. Разрешимость и аксиоматизация этой теории.
19. Элиминация кванторов в элементарной теории упорядоченного множества действительных чисел. Разрешимость и аксиоматизация этой теории.
20. Элиминация кванторов в элементарной теории поля комплексных чисел. Разрешимость и аксиоматизация этой теории.
21. Элиминация кванторов в элементарной теории упорядоченного поля действительных чисел (теорема Зайденберга-Тарского). Разрешимость и аксиоматизация этой теории.

Список литературы

[1] Н. Верещагин, А. Шень. Математическая логика и теория алгоритмов. Начала теории множеств. Москва: изд-во МЦНМО, 1999.

[2] Н. Верещагин, А. Шень. Математическая логика и теория алгоритмов. Исчисления и языки. Москва: изд-во МЦНМО, 2000.

[3] Дж. Шёнфилд. Математическая логика. М. Наука, 1975.