

Математическая логика и алгоритмы

Программа экзамена 2009

Н.К. Верещагин

В билет будет входить один теоретический вопрос и одна задача.

1. Пропозициональные формулы. Эквивалентные формулы, тавтологии. Основные законы рассуждений в форме тавтологий. ДНФ и КНФ.
2. Исчисление высказываний (ИВ): аксиомы, правила вывода, понятие вывода. Выводы из данного множества формул. Теорема о корректности ИВ.
3. Вывод формулы $A \rightarrow A$ в ИВ. Лемма о дедукции для ИВ. Правило разбора случаев и правило сведения к противоречию для ИВ.
4. Теорема о полноте ИВ.
5. Интуиционистское исчисление высказываний. Теорема корректности ИИВ относительно моделей Крипке. Невыводимость закона исключенного третьего.
6. Нетабличность ИИВ. Интерпретация классического ИВ в интуиционистском ИВ: теорема Гливенко (без доказательства).
7. Определение формулы данной сигнатуры. Интерпретации данной сигнатуры.
8. Определение параметров формулы. Определение истинности формулы в данной интерпретации при данной оценке переменных. Равносильные формулы. Общезначимые формулы.
9. Автоморфизмы интерпретаций. Выразимые в данной интерпретации предикаты. Доказательство невыразимости с помощью автоморфизмов.
10. Понятие теории (множество замкнутых формул) данной сигнатуры. Нормальные интерпретации и модели. Семантическое следование. Элементарная эквивалентность интерпретаций.
11. Элиминация кванторов в целых числах с операцией добавления единицы. Разрешимость элементарной теории этой интерпретации. Аксиоматизация элементарной теории этой интерпретации.
12. Элиминация кванторов в упорядоченном множестве рациональных чисел. Разрешимость элементарной теории этой интерпретации. Аксиоматизация элементарной теории этой интерпретации. Элементарная эквивалентность любых двух линейно упорядоченных плотных множеств без первого и последнего элементов.
13. Элиминация кванторов в упорядоченном множестве рациональных чисел с операцией сложения и константой 1. Разрешимость элементарной теории этой интерпретации.

14. Элиминация кванторов в поле комплексных чисел. Разрешимость и аксиоматизация элементарной теории поля комплексных чисел. Теорема об элементарной эквивалентности любых двух алгебраически замкнутых полей одной характеристики.
15. Элиминация кванторов в упорядоченном поле действительных чисел (теорема Зайденберга-Тарского). Разрешимость элементарной теории упорядоченного поля действительных чисел. Аксиоматизация элементарной теории теории упорядоченного поля действительных чисел.
16. Исчисление предикатов (ИП): аксиомы, правила вывода (модус поненс и правила Бернаиса). Теорема о корректности исчисления предикатов. Допустимость применения правила обобщения.
17. Выводимость частных случаев пропозициональных тавтологий в ИП. Вывод формул $\exists y \forall x \phi \rightarrow \forall x \exists y \phi$, $(\neg \forall x \phi \leftrightarrow \exists x \neg \phi)$, $(\neg \exists x \phi \leftrightarrow \forall x \neg \phi)$.
18. Лемма о дедукции для исчисления предикатов.
19. Лемма о консервативности исчисления предикатов при расширении сигнатуры добавлением новых констант.
20. Непротиворечивые и полные теории. Теорема о пополнении непротиворечивой теории.
21. Экзистенциально полные теории. Теорема о существовании полного и экзистенциально полного расширения любой непротиворечивой теории.
22. Теорема о существовании модели каждой полной и экзистенциально полной теории. Теорема о совместности непротиворечивой теории. Теорема о существовании счетной модели непротиворечивой теории не более чем счетной сигнатуры. Теорема Геделя о полноте исчисления предикатов.
23. Аксиомы равенства. Теорема о существовании нормальной модели непротиворечивой теории с аксиомами равенства. Теорема Геделя о полноте исчисления предикатов с равенством.
24. Теорема Мальцева о компактности. Нестандартные модели арифметики.
25. Вычислимые функции. Разрешимые и перечислимые множества. Различные эквивалентные определения перечислимости множества. Существование невычислимых функций и неразрешимых и неперечислимых множеств.
26. Теорема Поста. Критерий перечислимости в терминах проекции разрешимых множеств. Критерий вычислимости в терминах перечислимости: теорема о графике.
27. Универсальная вычислимая функция. Отсутствие вычислимой функции, универсальной для семейства всех всюду определенных вычислимых функций. Вычислимая функция, не имеющая всюду определенных вычислимых продолжений. Перечислимое неразрешимое множество. Неразрешимость проблемы остановки.
28. Классические неразрешимые алгоритмические проблемы: проблема совместности системы диофантовых уравнений, проблема тождества в конечно определенных полугруппах, проблема выводимости формулы в исчислении предикатов.
29. Программы с конечным числом переменных. Выразимость в интерпретации $(N, +, *)$ (то есть, арифметичность) любого разрешимого предиката

и любой вычислимой функции. Замкнутость класса арифметических предикатов относительно пересечений, объединений и проекций. Арифметичность перечислимых множеств.

30. Теорема Геделя о неполноте: элементарная теория интерпретации $(\mathcal{N}, +, *)$ неперечислима и не имеет разрешимой аксиоматизации.

31. Программа Гильберта обоснования математики. Вторая теорема Геделя о неполноте арифметики Пеано. Вторая теорема Геделя о неполноте для аксиоматической теории множеств.

Литература

Н. Верещагин, А. Шень. Математическая логика и теория алгоритмов. Начала теории множеств. Москва: изд-во МЦНМО, 1999.

Н. Верещагин, А. Шень. Математическая логика и теория алгоритмов. Исчисления и языки. Москва: изд-во МЦНМО, 2000.