

# Математическая логика и алгоритмы

## Программа экзамена 2007

Н.К. Верещагин

1. Пропозициональные формулы. Эквивалентные формулы, тавтологии. Основные законы рассуждений в форме тавтологий. ДНФ и КНФ.
2. Исчисление высказываний (ИВ): аксиомы, правила вывода, понятие выводимой формулы из данного множества формул. Теорема о корректности ИВ.
3. Вывод формулы  $A \rightarrow A$  в ИВ. Лемма о дедукции для ИВ. Правило разбора случаев и правило сведения к противоречию для ИВ.
4. Теорема о полноте ИВ.
5. Определение формулы данной сигнатуры. Интерпретации данной сигнатуры.
6. Определение параметров формулы. Определение истинности формулы в данной интерпретации при данной оценке переменных. Равносильные формулы. Общезначимые формулы.
7. Изоморфизмы интерпретаций. Элементарная эквивалентность интерпретаций. Элементарная эквивалентность изоморфных интерпретаций.
8. Выразимые в данной интерпретации предикаты. Доказательства невыразимости данного отношения в данной интерпретации (с помощью автоморфизмов).
9. Элиминация кванторов в целых числах с операцией добавления единицы, Элиминация кванторов в целых числах с отношением порядка и операцией добавления единицы. Алгоритм распознавания истинности замкнутых формул в интерпретациях  $(Z, S, =)$  и  $(Z, S, =, <)$ .
10. Элементарная эквивалентность упорядоченных множеств  $Z$  и  $Z + Z$ . Невыразимость порядка через сложение на целых числах.
11. Элиминация кванторов в упорядоченном множестве рациональных чисел. Элементарная эквивалентность упорядоченных множеств  $Q$  и  $R$ . Алгоритм распознавания истинности замкнутых формул в упорядоченном множестве рациональных чисел.
12. Аксиоматизация элементарных теорий: рациональные числа с порядком, целые числа с операцией добавления единицы, целые числа с отношением порядка и операцией добавления единицы.
13. Элиминация кванторов в поле комплексных чисел. Разрешимость и аксиоматизация элементарной теории поля комплексных чисел. Теорема об элементарной эквивалентности любых двух алгебраически замкнутых полей одной характеристики.

14. Исчисление предикатов (ИП): аксиомы, правила вывода (модус поненс и правила Бернаиса). Теорема о корректности исчисления предикатов. Допустимость применения правила обобщения.
15. Элиминация кванторов в упорядоченном поле действительных чисел. Разрешимость элементарной теории упорядоченного поля действительных чисел.
16. Выводимость частных случаев пропозициональных тавтологий в ИП. Вывод формул  $\exists y \forall x \phi \rightarrow \forall x \exists y \phi$ ,  $(\neg \forall x \phi \leftrightarrow \exists x \neg \phi)$ ,  $(\neg \exists x \phi \leftrightarrow \forall x \neg \phi)$ .
17. Лемма о дедукции для исчисления предикатов.
18. Лемма о новых константах (если выводится формула  $\phi(c)$ , где  $c$  новая константа, то выводится и формула  $\phi(x)$ ). Лемма о добавлении констант в сигнатуру (объем выводимых формул старой сигнатуры не меняется).
19. Непротиворечивые и полные теории. Лемма о пополнении непротиворечивой теории.
20. Экзистенциально полные теории. Теорема о существовании полного, непротиворечивого и экзистенциально полного расширения любой непротиворечивой теории.
21. Теорема о существовании модели у любой непротиворечивой, полной и экзистенциально полной теории. Теорема Геделя о полноте исчисления предикатов.
22. Теории с равенством. Теорема о существовании нормальной модели непротиворечивой теории с равенством. Теорема Геделя о полноте исчисления предикатов с равенством.
23. Программы с конечным числом переменных. Выразимость в интерпретации  $(N, +, *)$  (то есть, арифметичность) любого разрешимого предиката.
24. Универсальная вычислимая функция.
25. Перечислимые множества. Теорема Поста. Теорема о существовании перечислимого неразрешимого множества.
26. Теорема Геделя о неполноте: элементарная теория интерпретации  $(N, +, *)$  неперечислима и не имеет разрешимой аксиоматизации.

#### Литература

- Н. Верещагин, А. Шень. Математическая логика и теория алгоритмов. Начала теории множеств. Москва: изд-во МЦНМО, 1999.
- Н. Верещагин, А. Шень. Математическая логика и теория алгоритмов. Исчисления и языки. Москва: изд-во МЦНМО, 2000.