Математическая логика и алгоритмы
Программа экзамена 2003

Н.К. Верещагин

1. Трансфинитная индукция и трансфинитная рекурсия (определения по трансфинитной индукции). Теоремы о возможности рекурсивных определений с помощью всюду определенных рекурсивных правил и с помощью не всюду определенных рекурсивных правил.
2. Теорема о сравнении вполне упорядоченных множеств.
3. Аксиома выбора. Доказательство теоремы Цермело на основе аксиомы выбора.
4. Лемма Цорна. Доказательство леммы Цорна на основе аксиомы выбора и теоремы Цермело.
5. Теорема о равномощности бесконечного множества и его декартова квадрата.
6. Пропозициональные формулы. Эквивалентные формулы, тавтологии. Исчисление высказываний (ИВ): аксиомы, правила вывода, понятие выводимой формулы из данного множества формул. Теорема о корректности ИВ.
7. Вывод формулы $A \to A$ в ИВ. Лемма о дедукции для ИВ. Правило разбора случаев и правило сведения к противоречию для ИВ.
8. Теорема о полноте ИВ.
9. Определение формулы данной сигнатуры. Интерпретации данной сигнатуры. Элементарная эквивалентность изоморфных интерпретаций.
10. Доказательства невыразимости формулами первого порядка данного отношения в данной интерпретации (с помощью автоморфизмов).
11. Элиминация кванторов в интерпретациях $\langle \mathbb{Z}, x+1, =, < \rangle$ и $\langle \mathbb{Z}+\mathbb{Z}, x+1, =, < \rangle$. Элементарная эквивалентность этих интерпретаций. Невыразимость отношения "быть меньше" в интерпретации $\langle \mathbb{Z}, x+1, = \rangle$.
12. Элиминация кванторов в алгебраически замкнутых полях. Теорема об элементарной эквивалентности любых двух алгебраически замкнутых полей одной характеристики. Доказательство теоремы Гильберта о нулях.
13. Исчисление предикатов (ИП): аксиомы, правила вывода (модус поненс и правила Бернайса). Теорема о корректности исчисления предикатов. Допустимость применения правила обобщения.
14. Выводимость частных случаев пропозициональных тавтологий в ИП. Вывод формул $\exists y \forall x \phi \to \forall x \exists y \phi$, $(\neg \forall x \phi \leftrightarrow \exists x \neg \phi)$, $(\neg \exists x \phi \leftrightarrow \forall x \neg \phi)$.
15. Выводимость из посылок для исчисления предикатов. Лемма о дедукции для исчисления предикатов.

16. Понятие теории, модели теории, непротиворечивой теории. Формулировка теоремы Гёделя о полноте в сильной форме и вывод из нее теоремы о полноте исчисления предикатов в слабой форме.
17. Лемма о новых константах (если выводится формула $\phi(c)$, где c новая константа, то выводится и формула $\phi(x)$). Лемма о добавлении констант в сигнатуру (объем выводимых формул старой сигнатуры не меняется).
18. Теорема о существовании полного непротиворечивого расширения непротиворечивой теории.
19. Теорема о существовании полного, непротиворечивого и экзистенциально полного расширения любой непротиворечивой теории.
20. Теорема о существовании модели у любой непротиворечивой, полной и экзистенциально полной теории. Доказательство теоремы Геделя о полноте.
21. Теории с равенством. Теорема о существовании нормальной модели у непротиворечивой теории с равенством.
22. Теорема Мальцева о компактности. Невозможность аксиоматизации с точностью до изоморфизма множества натуральных чисел и множества целых чисел в сигнатуре $\{x+1, =\}$.
23. Элементарная теория данной интерпретации. Аксиоматизация данной интерпретации с точностью до элементарной эквивалентности. Система аксиом для элементарной теории множества целых чисел в сигнатуре $\{x+1, =, <\}$. Невозможность разрешимой аксиоматизации кольца целых чисел (теорема Геделя о неполноте) без доказательства.

Литература

Н. Верещагин, А. Шень. Математическая логика и теория алгоритмов. Начала теории множеств. Москва: изд-во МЦНМО, 1999.

Н. Верещагин, А. Шень. Математическая логика и теория алгоритмов. Исчисления и языки. Москва: изд-во МЦНМО, 2000.