

Программа экзамена по спецкурсу “Колмогоровская сложность”
2010

1. Определение простой колмогоровской сложности. Неувеличение сложности при алгоритмических преобразованиях.
2. Сложность слова и его длина. Количество слов малой сложности и существование несжимаемых слов.
3. Невычислимость колмогоровской сложности. Ограниченность вычислимых нижних оценок колмогоровской сложности.
4. Перечислимость сверху колмогоровской сложности. Эквивалентное определение колмогоровской сложности как наименьшей перечислимой сверху функции с условием нормировки.
5. Колмогоровская сложность других объектов. Колмогоровская сложность пары слов (верхняя оценка). Невозможность сделать постоянным добавочный член в этом неравенстве.
6. Условная сложность. Ее свойства.
7. Теорема Колмогорова-Левина о сложности пары слов.
8. Невозможность избавиться от добавочного члена $\log n$ в теореме Колмогорова-Левина (в обоих неравенствах). Информаци в x об y и ее свойства.
9. Релятивизация неравенств для колмогоровской сложности. Базисное неравенство. Общая информация тройки слов и пример, когда она отрицательна.
10. Доказательства неравенств с помощью диаграмм. Различные неравенства для общей информации. Теорема Шеннона о совершенном шифре.
11. Применения колмогоровской сложности:
бесконечность множества простых чисел,
квадратичная нижняя оценка для времени распознавания палиндромов на однополенточных машинах Тьюринга,
квадрат мощности дискретного трехмерного множества не превосходит произведения мощностей трех его плоских проекций.
12. Вероятностные меры на пространстве бесконечных последовательностей нулей и единиц. Вычислимые действительные числа и вычислимые меры. Множества меры нуль (нулевые множества).
13. Конструктивно нулевые множества. Случайные по Мартин-Лёфу последовательности.
14. Усиленный закон больших чисел. Стремление к $1/2$ доли единиц в случайной по Мартин-Лёфу последовательности (для равномерной меры).

15. Наибольшее конструктивно нулевое множество (для произвольной вычислимой меры).
16. Свойства случайных по равномерной мере последовательностей: вычислимые последовательности не случайны (но существуют случайные невычислимые последовательности), устойчивость понятия случайности относительно конечных изменений, вычислимая подпоследовательность случайной последовательности случайна.
17. Неслучайность характеристических функций перечислимых множеств. Существование вычислимой относительно $0'$ случайной последовательности.
18. Перечислимые снизу полумеры на натуральных числах. Полумеры, задаваемые вероятностными алгоритмами. Совпадение этих классов. Существование максимальной полумеры (априорной вероятности).
19. Префиксно корректные функции, существование оптимальной префиксно корректной функции, префиксная сложность.
20. Теорема о совпадении префиксной сложности и минус логарифма априорной вероятности. Эквивалентное определение префиксной сложности с помощью беспрефиксных функций.
21. Характеризация случайных по МЛ последовательностей в терминах префиксной сложности.
22. Условная префиксная сложность. Релятивизация неравенств с префиксной сложностью. Условные перечислимые снизу полумеры и совпадение условной префиксной сложности и минус логарифма априорной вероятности.
23. Теорема о префиксной сложности пары слов.
24. Доказательство усиленного закона больших чисел с помощью колмогоровской сложности. Теорема Хартли-Литтлвуда: оценка $O(\sqrt{\log n/n})$ отклонения вероятности от частоты для случайных по МЛ последовательностей.
25. Монотонная сложность и сложность разрешения. Их монотонность. Сравнение с обычной и префиксной сложностями. Характеризация вычислимых последовательностей в терминах монотонной сложности и сложности разрешения. Комбинаторная характеристика сложности разрешения.
26. Перечислимые снизу распределения вероятности на пространстве конечных и бесконечных последовательностей нулей и единиц. Существование максимального перечислимого снизу распределения. Априорная вероятность.
27. Сравнение монотонной сложности и логарифма априорной вероятности. Теорема Гача о их несовпадении (без доказательства). Монотонная сложность не превосходит минус логарифма любой вычислимой меры.
28. Критерий случайности последовательности в терминах монотонной слож-

ности и априорной вероятности.

29. Доказательство закона повторного логарифма с помощью монотонной сложности (или априорной вероятности на дереве).

Список литературы

В.А. Успенский, Н.К. Верещагин, А. Шень. Колмогоровская сложность (неопубликованная книга).
Выложена в <http://lpcs.math.msu.su/~ver/book.htm>,
<ftp://ftp.mcsme.ru/users/shen/kolmbook>.