

Программа экзамена по спецкурсу “Колмогоровская сложность”
(осенний семестр 2014 года)

1. Определение простой колмогоровской сложности. Сложность слова и его длина. Количество слов малой сложности и существование несжимаемых слов.
2. Невычислимость колмогоровской сложности. Ограниченность вычислимых нижних оценок колмогоровской сложности. Перечислимость сверху колмогоровской сложности.
3. Эквивалентное определение простой колмогоровской сложности как наименьшей перечислимой сверху функции с условием нормировки. Неувеличение сложности при алгоритмических преобразованиях.
4. Колмогоровская сложность других объектов. Колмогоровская сложность пары слов (верхняя оценка). Невозможность сделать постоянным добавочный член в этом неравенстве.
5. Условная сложность (определение). Изменение условной сложности при алгоритмических преобразованиях. Количество слов малой условной сложности.
6. Теорема Колмогорова - Левина о сложности пары слов.
7. Понятие информации, ее свойства и коммутативность.
8. Релятивизация и новые информационные неравенства и равенства. Базисное неравенство.
9. Общая информация тройки слов и пример, когда она отрицательна. Применение диаграмм для получения новых неравенств.
10. Теорема Шеннона о совершенном шифре, монотонность информации, неравенство для сложности тройки. Неравенство Лумиса-Уитни и его доказательство с помощью колмогоровской сложности.
11. Применения колмогоровской сложности: бесконечность множества простых чисел, квадратичная нижняя оценка для времени копирования и распознавания симметрии на одноленточных машинах Тьюринга.
12. Применение колмогоровской сложности в доказательстве теоремы Ибарры-Кима о k -головочных конечных автоматах.
13. Меры на пространстве бесконечных 0-1-последовательностей. Равномерная мера (мера Лебега), бернуллиевы меры. Доказательство усиленного закона больших чисел для бернуллиевых мер.
14. Определение конструктивно нулевого множества относительно данной меры. Определение случайной по Мартин-Лёфу последовательности. Критерий Соловея случайности последовательности.
15. Теорема Мартин-Лёфа о максимальном конструктивно нулевом множестве. Случайные последовательности относительно вычислимой меры. Случайность по Соловею.
16. Случайные последовательности относительно равномерной меры: неслучайность вычислимых последовательностей, устойчивость относительно конечных

изменений и взятия вычислимой подпоследовательности. Неслучайность вычислимых последовательностей по равномерной мере. Неслучайность перечислимых и ко-перечислимых множеств. Существование вычислимой относительно $0'$ случайной последовательности.

17. Перечислимые снизу полумеры на натуральных числах: два определения и их эквивалентность. Сравнение полумер. Существование наибольшей полумеры (априорной вероятности).

18. Префиксные и префиксно корректные функции. Существование оптимальных функций в классе префиксно корректных и беспрефиксных функций. Машины с самоограниченным входом.

19. Основной теорема о префиксной сложности: совпадение двух видов префиксных сложностей с минус логарифмом априорной вероятности.

20. Условная префиксная сложность, условная априорная вероятность и связь между ними. Теорема Колмогорова - Левина о сложности пары для префиксной сложности.

21. Критерий случайности по Мартин-Лёфу для любой вычислимой меры в терминах префиксной сложности начальных фрагментов.

22. Перечислимые снизу полумеры на дереве. Эквивалентное определение с помощью вероятностных машин.

23. Наибольшие перечислимые снизу меры на дереве. Априорная сложность и ее свойства. Характеризация вычислимых последовательностей в терминах априорной сложности начальных фрагментов.

24. Монотонная сложность и ее свойства.

25. Теорема Левина-Шнорра о критерии случайности в терминах монотонной и априорной сложностей.

26. Число Чейтина Ω , его случайность по равномерной мере. Полные по Соловею перечислимые снизу числа, их случайность и связь с Ω .

Список литературы

- [1] В.А. Успенский, Н.К. Верещагин, А. Шень. Колмогоровская сложность (неизданная книга). Выложена в <http://lpcs.math.msu.su/~ver/book.htm>, <ftp://ftp.mccme.ru/users/shen/kolmbook>.