

Программа экзамена по спецкурсу «Колмогоровская сложность»

1. Теорема Соломонова—Колмогорова об оптимальном способе описания.
2. Основные свойства колмогоровской энтропии
3. Алгоритмические свойства колмогоровской энтропии
4. Теорема о полноте по Тьюрингу надграфика колмогоровской энтропии в классе перечислимых множеств
5. Программно-независимое определение колмогоровской энтропии
6. Теорема Соломонова — Колмогорова об оптимальном условном способе описания.
7. Основные свойства условной энтропии
8. Количество слов длины n и энтропии не менее n
9. Теорема о выражении сложности пары слов через сложности ее компонентов
10. Теорема Соломонова — Колмогорова об оптимальном префиксном способе описания.
11. Префиксная энтропия слова и его длина
12. Вычислимость префиксных функций на машинах с блокирующим входом
13. Перечислимые снизу полумеры на $\{0, 1\}^*$, эквивалентность двух определений.
14. Существование универсальной перечислимой снизу полумеры $\{0, 1\}^*$.
15. Теорема о связи универсальной перечислимой снизу полумеры и префиксной энтропии
16. Теорема о выражении префиксной энтропии пары слов через префиксную энтропию ее компонентов
17. Невозможность определения понятия случайной бесконечной последовательности с помощью обычной колмогоровской энтропии
18. Теорема существования максимального конструктивно нулевого множества
19. Доказательство усиленного закона больших чисел
20. Свойства случайных по Мартин-Лёфу последовательностей
21. Префиксная энтропия начальных фрагментов случайных по Мартин-Лёфу последовательностей.
22. Энтропия разрешения, монотонная энтропия.
23. Перечислимые снизу полумеры на Ω и априорная энтропия.
24. Соотношение между пятью видами энтропии.
25. Характеризация случайных по Мартин-Лёфу последовательностей в терминах априорной и монотонной энтропий.

26. Случайность по Мартин-Лёфу по произвольной вычислимой мере и её характеристика в сложностных терминах.
27. Неравенство $KM(x) \leq -\log_2 \mu(x) + O(1)$ (где μ — вычислимая мера на Ω).
28. Верхняя оценка на величину n -ого простого числа (с использованием колмогоровской сложности).
29. Сравнение k - и $k + 1$ -головочных конечных автоматов (с использованием колмогоровской сложности).
30. Нижняя оценка cn^2 времени распознавания симметрии на одноленточных машинах Тьюринга (с использованием колмогоровской сложности).
31. Верхняя оценка объёма трёхмерного тела (с использованием колмогоровской сложности).
32. Доказательство усиленного закона больших чисел (с использованием колмогоровской сложности).
33. Доказательство верхней оценки в законе повторного логарифма (с использованием колмогоровской сложности).
34. Энтропия Шеннона и её свойства.
35. Связь шенноновской и колмогоровской энтропий.
36. Теория предсказаний по Соломонову.
37. Стохастические по Чёрчу и по Колмогорову — Лавлэнду последовательности, включения: (стохастические по Чёрчу) \supseteq (стохастические по Колмогорову — Лавлэнду) \supseteq (случайные по Мартин-Лёфу).
38. Пример Вилля: стохастическая по Чёрчу последовательность, не случайная по Мартин-Лёфу.
39. Теорема Ан. Мучника о нестохастичности по Колмогорову — Лавлэнду последовательностей с малой сложностью.
40. Пример ван Ламбальгена: стохастическая по Колмогорову — Лавлэнду, но не случайная по Мартин-Лёфу последовательность.

Задачи

41. Доказать, что $m + K(m) < n + K(n) + O(1)$ при всех натуральных $m < n$
42. Доказать, что $2K(a, b, c) < K(a, b) + K(a, c) + K(b, c) + O(\log K(a, b, c))$.
43. Доказать, что если множество $\{n \mid \omega_n = 1\}$ перечислимо, то $K(\omega_{1..n}) < 2 \log n + O(1)$, $K(\omega_{1..n} | n) < \log n + O(1)$.
44. Доказать, что если $K(xy) = 2n + O(1)$ и $|x| = |y| = n$, то $K(x) = n + O(1)$ и $K(y) = n + O(1)$
45. Доказать, что среднее значение $K(i)$ при $i = 1, \dots, n$ равно $\log n + O(1)$

46. Доказать, что если $K(\omega_{1..n}|n) = O(1)$, то последовательность ω вычислима.
47. Доказать, что среди вычисляемых распределений вероятностей на $\{0, 1\}^*$ нет максимального.
48. Доказать, что для почти всех последовательностей найдётся c , для которого $K(\omega_{1..n}) > n - c$ для бесконечно многих n .
49. Пусть последовательность $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 \dots$ случайна по Мартин-Лёфу. Показать, что тогда последовательность $\omega_1 \oplus \omega_2, \omega_3 \oplus \omega_4 \dots$ также случайна по Мартин-Лёфу.
50. Доказать, что если x двоичное слово длины n и энтропии не менее $n - m$, то количество 1 в x отличается от $n/2$ на величину не менее $n^{1/4}2^{-m/2+O(1)}$.
51. Доказать, что если x случайное слово (то есть энтропия x близка к его длине), то и любое подслово x случайно (указать подходящие оценки).