

Программа экзамена по спецкурсу “Колмогоровская сложность”
2008

1. Определение простой колмогоровской сложности. Неувеличение сложности при алгоритмических преобразованиях. Сложность слова и его длина. Количество слов малой сложности и существование несжимаемых слов.
2. Невычислимость колмогоровской сложности. Перечислимость сверху колмогоровской сложности. Эквивалентное определение колмогоровской сложности как наименьшей перечислимой сверху функции с условием нормировки.
3. Колмогоровская сложность произвольных конструктивных объектов. Сложность пары объектов не превосходит суммы их сложностей.
4. Простейшие применения колмогоровской сложности: доказательство бесконечности множества простых чисел и квадратичная нижняя оценка для числа шагов одноленточной машины Тьюринга, распознающей палиндромы.
5. Условная колмогоровская сложность и ее свойства. Сложность пары слов равна сложности первого слова плюс условная сложность второго слова при известном первом слове (теорема Колмогорова–Левина).
6. Релятивизация. Базисные неравенства. Неравенство $2KS(x, y, z) < KS(x, y) + KS(x, z) + KS(y, z)$ и его комбинаторная интерпретация. Комбинаторная интерпретация других неравенств.
7. Определение количества информации в одном объекте о другом. Его простейшие свойства. Коммутативность информации. Пример двух слов с невыделяемой общей информацией (без доказательства). Определение количества общей информации трех слов и пример трех слов, для которых эта величина отрицательна.
8. Случайные слова (по данному распределению вероятности). Дефект случайности. Его свойства.
9. Меры на пространстве бесконечных последовательностей нулей и единиц. Множества меры нуль. Конструктивно нулевые множества. Закон больших чисел. Случайные по Мартин-Лёфу последовательности.
10. Вычислимые действительные числа. Вычислимые функции (отображающие слова в действительные числа). Вычислимые меры на пространстве бесконечных последовательностей нулей и единиц. Теорема Мартин-Лёфа о существовании наибольшего конструктивно нулевого множества.
11. Префиксно корректные и беспрефиксные функции. Теорема о существовании оптимальной декодирующей функции в классе префиксно корректных и классе беспрефиксных функций. Префиксная сложность (два вида).

12. Свойства префиксной сложности. Условная префиксная сложность и префиксная сложность пары строк.
13. Перечислимые снизу меры на натуральных числах. Эквивалентное определение с помощью вероятностных машин. Априорная вероятность.
14. Основная теорема о префиксной сложности.
15. Условная префиксная сложность. Перечислимые снизу семейства мер на натуральных числах и условная априорная вероятность.
16. Теорема Левина-Шнорра о префиксной сложности начальных фрагментов случайной по Мартин-Лёфу последовательности.
17. Теорема о префиксной сложности пары (она равна сумме префиксной сложности первой компоненты и условной сложности второй компоненты при известной первой компоненте и ее префиксной сложности).
18. Вероятностные машины и перечислимые снизу меры на дереве. Априорная мера на дереве. Априорная сложность.
19. Свойства априорной сложности. Определение априорной сложности как наименьшей перечислимой функции в некотором классе функций.
20. Критерий случайности по Мартин-Лёфу в терминах априорной сложности начальных отрезков последовательности.
21. Непрерывные вычислимые операторы на пространстве конечных и бесконечных последовательностей. Монотонная сложность.
22. Свойства монотонной сложности (перечислимость сверху, монотонность) Сравнение монотонной сложности с префиксной, априорной и обычной сложностями. Сравнение префиксной сложности с минус логарифмом вычислимой вероятностной меры на дереве. Критерий Левина-Шнорра случайности по вычислимой мере в терминах монотонной сложности.
23. Сложность разрешения и ее свойства. Комбинаторное определение сложности разрешения. Соотношение с другими сложностями.
24. Частотный подход к определению случайных последовательностей. Правила выбора и случайные по Мизесу-Черчу последовательности. Соотношение случайности по Мизесу-Черчу и случайности по Мартин-Лёфу.
25. Пример Вилля. Неслучайные по Мизесу-Черчу последовательности логарифмической сложности.
26. Не всюду определенные правила выбора. Случайные по Мизесу-Черчу-Дэли последовательности малой сложности. Не существует случайные по Мизесу-Черчу-Дэли последовательности логарифмической сложности.