0.1. Конструктивные множества

Пусть $(V, \in)$ — некоторая модель теории ZF. Конструктивные множества образуют наименьшее по включению подмножество $L \subset V$, содержащее все ординалы из V и такое, что $(L, \in)$ является моделью теории ZF. Разумеется, это не является определением конструктивных множеств: нам ещё предстоит доказать, что такая модель существует. Наш план таков. Мы дадим явное определение L с помощью трансфинитной рекурсии, затем докажем, что $(L, \in)$ есть модель теории ZF, содержащая все ординалы из V. Минимальность будет очевидна.

Чтобы дать определение L, мы зафиксируем некоторый конечный список функционалов $F_1, \ldots, F_N$. Под n-местным функционалом над V мы понимаем некоторую формулу φ с $n+1$-ой свободной переменной такую, что для всех $x_1, \ldots, x_n$ из V существует не более одного y для которого $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$; функционал переводит $x_1, \ldots, x_n$ в y. Функционалы $F_1, \ldots, F_N$ будут всюду определёнными на V и будут иметь конечную глубину. Это означает, что любой элемент множества $F_i(x_1, \ldots, x_n)$ получается применением конечного числа операций взятия неупорядоченной пары к элементам $x_1, \ldots, x_n$, элементам их элементов, элементам элементов элементов и т.д. Точнее, для произвольного множества x и натурального числа i определим $x^{(i)}$ и $x^{[i]}$ по индукции: $x^{(0)} = x^{[0]} = x$, $x^{(i+1)} = x^{(i)} \cup \mathrm{Un}(x^{(i)})$. $x^{[i+1]} = x^{[i]} \cup \{\{a, b\} \mid a, b \in x^{[i]}\}$. Мы говорим, что F_i имеет конечную глубину, если $F_i(x_1, \ldots, x_n) \subset ((x_1 \cup \cdots \cup x_n)^{(k)})^{[k]}$ для некоторого натурального k. Например, операции взятия объединения, пересечения и разности двух множеств обладают таким свойством (глубина этих функционалов равна 1). Декартово произведение тоже имеет конечную глубину: упорядоченная пара $\langle u, v\rangle$ из $x \times y$ получается двумя применениями операции взятия неупорядоченной пары к элементам множеств x и y (напомним, что $\langle u, v\rangle = \{\{u\}, \{u, v\}\}$). Более интересный пример — функционал $F(x) = \{\langle a, b\rangle \mid \langle b, a\rangle \in x\}$: чтобы получить одну пару из $F(x)$ надо дважды применить взятие неупорядоченной пары к элементам элементов x (глубина равна 4).

Так вот, зафиксируем некоторый список функционалов конечной глубины $F_1, \ldots, F_N$ (какие именно нужно взять функционалы будет видно из дальнейшего). Пусть $K(\alpha)$ — функционал, осуществляющий биекцию между ординалами и парами ординалов. Определим $\pi_1^2(\alpha)$ и $\pi_2^2(\alpha)$ как первый и второй компонент пары $K(\alpha)$, соответственно. Обратный функционал обозначим через $[\beta, \gamma]$. То есть $[\beta, \gamma]$ — это тот ординал α, для которого $\pi_1^2(\alpha) = \beta$, $\pi_2^2(\alpha) = \gamma$. Функционал $[\beta, \gamma]$ можно использовать и для осуществления биекции между тройками ординалов, четверками ординалов и т.д. Для этого определим $[\beta, \gamma, \delta]$ как $[\beta, [\gamma, \delta]]$ и соответственно $\pi_1^3(\alpha) = \pi_1^2(\alpha)$, $\pi_2^3(\alpha) = \pi_1^2(\pi_2^2(\alpha))$, $\pi_3^3(\alpha) = \pi_2^2(\pi_2^2(\alpha))$. Аналогично для каждого n определяются функционалы $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ и $\pi_i^n(\alpha)$ так, чтобы было выполнено $[\pi_1^n(\alpha), \ldots, \pi_n^n(\alpha)] = \alpha$.

Каждому ординалу α сопоставим *конструктивное множество с номером* α, $C(\alpha)$, по следующему рекурсивному правилу:

$$C(\alpha) = \begin{cases} \{C(\sigma) \mid \sigma < \alpha\}, & \text{если } \pi_1^2(\alpha) = 0, \\ C(\beta_0) \cap F_i(C(\beta_1), \ldots, C(\beta_n)), & \text{если } 1 \leqslant i \leqslant N, \\ & \alpha = [i, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n], \\ \{C(\beta), C(\gamma)\}, & \text{если } \alpha = [\delta, \beta, \gamma],\ \delta > N. \end{cases} \tag{0.1}$$

Корректность этого определения следует из такого, легко проверяемого, свойства операции $\alpha = [\beta, \gamma]$. Если $\alpha = [\beta, \gamma]$ и $\beta > 0$, то $\gamma < \alpha$.

1. Докажите, что для любого бесконечного кардинала $\aleph$ мощность множества $C(\aleph)$ равна $\aleph$.

Множество x называется *конструктивным*, если $x = C(\alpha)$ для некоторого ординала α; наименьший такой ординал α называется порядком x и обозначается $\mathrm{Od}(x)$.

Утверждение $x = C(\alpha)$ может быть записано подходящей формулой языка теории множеств. Поэтому и утверждение "x конструктивно" может быть записано формулой $L(x) = \exists\alpha\,(\mathrm{Ord}(\alpha) \wedge x = C(\alpha))$.

Установим некоторые простые свойства конструктивных множеств.

- Если $x \in y$ и y конструктивно, то и x конструктивно, причём порядок x меньше порядка x.
  Это доказывается трансфинитной индукцией по порядку y. Действительно, пусть конструктивное множество y имеет порядок α. Если $C(\alpha)$ получено по первой строчке определения (0.1), то утверждение очевидно. Если $C(\alpha)$ получено по второй строчке, то $x \in C(\beta_0)$ и при этом $\beta_0 < \alpha$. Воспользовавшись индуктивным предположением заключаем, что x конструктивно и порядок x меньше $\beta_0 < \alpha$. Если $C(\alpha)$ получено по третьей строчке определения (0.1), то $x = C(\beta)$ или $x = C(\gamma)$. Поскольку и β, и γ меньше α, утверждение доказано.

- Если x и y конструктивны, то и пара $\{x, y\}$ конструктивна. Действительно, $\{x, y\} = C[N{+}1, \mathrm{Od}(x), \mathrm{Od}(y)]$.

- Если любой элемент множества x конструктивен, то x может быть расширено до некоторого конструктивного множества $y \supset x$ (заметим, что само x может не быть конструктивным).
  Действительно, пусть β — любой ординал, больший порядков всех элементов x. Положим $y = C([0, \beta])$.

- Семейство конструктивных множеств замкнуто относительно применения любого функционала из выбранного нами списка $F_1, \ldots, F_N$.
  Действительно, предположим, что $x_1, \ldots, x_n$ конструктивны. Сначала докажем, что $F_i(x_1, \ldots, x_n)$ может быть расширено до конструктивного множества. Для этого достаточно доказать, что все элементы множества $F_i(x_1, \ldots, x_n)$ конструктивны. А это следует из того, что функционал F_i имеет ограниченную глубину и того, что конструктивные множества замкнуты относительно перехода к элементу множества и образования неупорядоченной пары. Итак, пусть y конструктивное множество, расширяющее $F_i(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда $F_i(x_1, \ldots, x_n) = C([i, \mathrm{Od}(y), \mathrm{Od}[x_1], \ldots, \mathrm{Od}[x_n]])$.

2. Пусть среди функционалов $F_1, \ldots, F_N$ имеется взятие объединения двух множеств $x \cup y$. Докажите, что тогда $C(\omega)$ равно множеству всех наследственно конечных множеств. (Множество x называется наследственно конечным, если его транзитивное замыкание $\bigcup_{i \in \omega} x^{(i)}$ конечно.)

Теорема 1. При подходящем выборе функционалов $F_1, \ldots, F_N$ интерпретация $(L, \in)$ удовлетворяет всем аксиомам ZF.

Начнём доказательство с определения двух вспомогательных понятий — релятивизованной и абсолютной формулы. Пусть φ произвольная формула языка ZF. Формула φ_L, получаемая из φ релятивизацией к L, определяется по индукции:

- $(x \in y)_L = (x \in y), \quad (x = y)_L = (x = y)$,
- $(\varphi \wedge \psi)_L = (\varphi_L \wedge \psi_L), \quad (\varphi \vee \psi)_L = (\varphi_L \vee \psi_L), \quad (\varphi \to \psi)_L = (\varphi_L \to \psi_L), \quad (\neg\varphi)_L = \neg(\varphi_L)$,
- $(\exists x\, \varphi)_L = \exists x\,(L(x) \wedge \varphi_L), \quad (\forall x\, \varphi)_L = \forall x\,(L(x) \to \varphi_L)$.

Истинность в L замкнутой формулы φ эквивалентна истинности в V формулы φ_L, что иногда даёт возможность сводить истинность аксиом в L к их истинности в V. Формулы, для которых это возможно сделать напрямую, называются абсолютными. Точнее формула φ (возможно с параметрами) называется *абсолютной*, если формула $\varphi \leftrightarrow \varphi_L$ истинна в V при всех значениях параметров из L. Например, формулы $x \in y$ и $x = y$ абсолютны (при этом совершенно неважно, как было построено L). Другой пример: формула $\forall z\,(x \in x \to z \in y)$ абсолютна; теперь нам важно, что L транзитивно. Если две формулы абсолютны, то и формула, полученная из них соединением любой логической связкой абсолютна. Поэтому формула $x = y \leftrightarrow \forall z\,(x \in x \leftrightarrow z \in y)$ абсолютна. Поскольку в V истинна аксиома объёмности, эта формула истинна V при всех значениях x, y, следовательно аксиома объёмности истинна и в L.

Для проверки истинности в L аксиомы регулярности полезно заметить, что абсолютность сохраняется при навешивании ограниченных кванторов (для навешивания неограниченных кванторов это уже неверно). Мы говорим, что формула φ получена из ψ навешиванием ограниченного квантора, если $\varphi = (\forall x \in y)\,\psi$ или $\varphi = (\exists x \in y)\,\psi$ (y может быть параметром ψ). Ясно, что если ψ абсолютна, то и φ абсолютна (при этом важна только транзитивность L). Аксиома регулярности (без внешнего квантора всеобщности) может быть получена с помощью навешивания кванторов из формул $x \in y$ и $x = y$, например, таким образом:

$$(\exists y \in x)\,(y = y) \to (\exists y \in x)\,(\forall z \in x)\,\neg(z \in y).$$

Так как эта формула абсолютна и истинна в V при всех значениях x, y, аксиома регулярности истинна и в L.

Докажем теперь, что в $(L, \in)$ истинна аксиома выделения (при подходящем выборе $F_1, \ldots, F_N$).

$\triangleleft$ Пусть $\varphi(y, x_1, \ldots, x_n)$ формула с параметрами y, $x_1, \ldots, x_n$. Истинность в L аксиомы

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n\, \forall v\, \exists u\, \forall y\,(y \in u \leftrightarrow (y \in v \wedge \varphi(y, x_1, \ldots, x_n)))$$

означает, что для любых конструктивных множеств $c_1, \ldots, c_n, d$ множество $\{y \in d \mid \varphi_L(y, c_1, \ldots, c_n)\}$ конструктивно. Мы докажем это индукцией по построению формулы $\varphi(y, x_1, \ldots, x_n)$. Точнее, по индукции мы будем доказывать такое утверждение.

- Пусть все параметры формулы ψ содержатся в списке $y, x_1, \ldots, x_n$. Пусть b — конструктивное множество. Тогда множество $c = \{\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \mid a_1, \ldots, a_n \in b,\ \psi_L(a_1, \ldots, a_n)\}$ конструктивно.

Напомним, что $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ определяется как $\langle a_1, \langle a_2, \ldots, \langle a_{n-1}, a_n\rangle\rangle\rangle$. $\blacksquare$

Пусть сначала ψ имеет вид $x_i \in x_j$. Нам нужно показать конструктивность множества $c = c(i,j,n) = \{\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \mid a_1, \ldots, a_n \in b,\ a_i \in a_j\}$. Разберём сначала случай $i = 1$, $j = n = 2$. В этом случае $c = \{\langle a_1, a_2\rangle \mid a_1, a_2 \in b,\ a_1 \in a_2\}$, поэтому нам достаточно включить в число избранных функционал $F_1(b) = \{\langle a_1, a_2\rangle \mid a_1, a_2 \in b,\ a_1 \in a_2\}$ (очевидно, что он имеет конечную глубину). Пусть теперь $i = 1$, $j = 2$, $n = 3$. Включим в число избранных функционал $F_2(c, b) = \{\langle a_1, a_2, a_3\rangle \mid \langle a_1, a_2\rangle \in c,\ a_3 \in b\}$. Нужное нам множество получается как $F_2(F_1(b), b)$, где F_1 — функционал, определённый в предыдущем пункте. Аналогичным способом можно действовать в случае $i = 1$, $j = 2$ при любых $n > 2$, причём новых функционалов не понадобится. Например, для $n = 4$ нужное нам множество равно $F_2(F_2(F_1(b), b), b)$. Теперь рассмотрим случай $i = 1, j = 3, n \geqslant 3$. Множество $c(1, 3, n)$ получается из множества $c(1, 2, n-1)$ операцией $F_3(c, b) = \{\langle a_1, a_2, a_3\rangle \mid \langle a_1, a_3\rangle \in c,\ a_2 \in b\}$. Добавим также и этот функционал к выбранным. Многократное применение этого функционала позволит показать конструктивность множества $c(1, j, n)$ при всех $1 < j$. Теперь, положив $F_4(c, b) = c \times b$, мы сможем доказать конструктивность множеств вида $c(i, j, n)$ при всех $i < j$. Осталось рассмотреть случаи $j < i$ и $i = j$. Для первого случая надо добавить функционал $F_5(b) = \{\langle a_1, a_2\rangle \mid a_1, a_2 \in b,\ a_2 \in a_1\}$. Во втором случае можно заметить, что множество $c(i, i, n)$ пусто.

Совершенно аналогично можно рассуждать в случае когда ψ имеет вид $x_i = x_j$ (понадобится добавить функционал $F_6(b) = \{\langle a, a\rangle \mid a \in b\}$).

Теперь рассмотрим случай, когда формула ψ получена из других формул с помощью соединения логических связок и навешивания кванторов. Будем считать, что в формуле используются только связки $\vee, \neg$ и квантор $\exists$ (остальные связки и квантор $\forall$ выражаются через эти). Если $\psi = \theta \vee \eta$, то множество $\{\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \mid a_1, \ldots, a_n \in b,\ \psi_L(a_1, \ldots, a_n)\}$ есть объединение множеств $\{\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \mid a_1, \ldots, a_n \in b,\ \theta_L(a_1, \ldots, a_n)\}$ и $\{\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \mid a_1, \ldots, a_n \in b,\ \eta_L(a_1, \ldots, a_n)\}$, поэтому достаточно добавить функционал $F_7(c,d) = c \cup d$. Если $\psi = \neg\theta$, то множество $\{\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \mid a_1, \ldots, a_n \in b,\ \psi_L(a_1, \ldots, a_n)\}$ равно разности множеств $b \times (b \times \cdots \times (b \times b) \cdots)$ (n раз) и $\{\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \mid a_1, \ldots, a_n \in b,\ \theta_L(a_1, \ldots, a_n)\}$, поэтому достаточно добавить функционал $F_8(c,d) = c \setminus d$.

Наконец, пусть $\psi = \exists y \theta$. Нам надо доказать, что множество $\{\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \mid a_1, \ldots, a_n \in b,\ (\exists y \in L)\theta_L(y, a_1, \ldots, a_n)\}$ конструктивно. Сначала покажем, что существует конструктивное множество $d \supset b$ такое, что для всех $a_1, \ldots, a_n \in b$, если найдётся такое y, что $\theta_L(y, a_1, \ldots, a_n)$, то такое y найдется в множестве d. Для этого сначала положим $d = b$, а затем для каждого $a_1, \ldots, a_n \in b$ добавим в d конструктивное множество y наименьшего порядка, для которого $\theta_L(y, a_1, \ldots, a_n)$ (если такого y нет, то ничего не добавляем). По аксиоме замены получим некоторое множество, затем расширим его до конструктивного. По индуктивному предположению множество $\{\langle a_0, a_1, \ldots, a_n\rangle \mid a_0, a_1, \ldots, a_n \in d,\ L \models \theta(a_0, a_1, \ldots, a_n)\}$ конструктивно. Добавим к нашим функционалам проекцию на вторую координату: $F_9(a) = \{a_2 \mid \exists a_1\, \langle a_1, a_2\rangle \in a\}$. (Заметим, что нам достаточно только проекции на вторую координату, поскольку мы можем применять индуктивное предположению к списку параметров формулы, упорядоченных произвольным образом.) Тогда множество множество $\{\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \mid a_1, \ldots, a_n \in d,\ (\exists y \in d)\, \theta_L(y, a_1, \ldots, a_n)\}$ будет конструктивным. Пересечение этого множества с декартовым произведением $b \times b \times \cdots \times b$ и есть искомое множество.

Осталось вывести из доказанного утверждения истинность в L аксиомы выделения. Множество $\{y \in d \mid \varphi_L(y, c_1, \ldots, c_n)\}$ равно проекции на первую координату пересечения множеств $\{\langle a_0, a_1, \ldots, a_n\rangle \mid a_0, a_1, \ldots, a_n \in d \cup \{c_1, \ldots, c_n\}\ \psi_L(a_0, a_1, \ldots, a_n)\}$ и $d \times \{c_1\} \times \cdots \times \{c_n\}$ (добавим ещё в число $F_1, \ldots, F_N$ операции пересечения двух множеств и проекции на первую координату). $\triangleright$

Истинность аксиом существования пустого множества, неупорядоченной пары, объединения, множества всех подмножеств и аксиомы замены следует из истинности аксиомы выделения. Например, чтобы доказать истинность аксиомы степени, надо установить, что для каждого конструктивного множества a множество $c = \{b \in L \mid (\forall x\, (x \in b \to x \in a))_L\}$ конструктивно. Можно подобрать конструктивное множество d, расширяющее c и воспользовавшись истинностью в L аксиомы выделения сузить его до c. Аналогично доказывается истинность остальных перечисленных аксиом.

3. Провести это рассуждение подробно.

4. Докажите, что в L истинна аксиома существования пустого множества, не прибегая к аксиоме выделения. (Указание. Множество $C(0)$ пусто и свойство множества быть пустым выразимо абсолютной формулой.)

5. Докажите, что в L истинна аксиома существования неупорядоченной пары, не прибегая к аксиоме выделения. (Указание. Надо показать, что свойство $z = \{x, y\}$ выражается абсолютной формулой.)

6. Пусть в составе $F_1, \ldots, F_N$ имеется взятие объединения $\mathrm{Un}(x)$. Докажите, что в L истинна аксиома объединения, не прибегая к аксиоме выделения. (Указание. Надо показать, что свойство $y = \mathrm{Un}(x)$ выразимо абсолютной формулой.)

Осталось проверить истинность аксиомы бесконечности: $\exists y\, (\emptyset \in y \wedge (\forall x \in y)\, (S(x) \in y))$. Это следует из конструктивности всех ординалов (которую мы установим чуть позже). В частности, ординал ω (множество натуральных чисел) принадлежит L. Этот ординал удовлетворяет в V формуле $\emptyset \in y \wedge (\forall x \in y)\, (S(x) \in y)$. Осталось только проверить абсолютность этой формулы. Абсолютность первой части ($\emptyset \in y$) очевидна. Абсолютность формулы $S(x) \in y$ следует из двух очевидных наблюдений: (1) если x конструктивно, то и $S(x)$ конструктивно, (2) формула $\forall u\,(u \in z \leftrightarrow u = x \vee u \in x)$, выражающая то, что $S(x) = z$, абсолютна.

7. Докажите, что в L истинна аксиома бесконечности, не используя конструктивности множества ω. (Указание. Аксиоме бесконечности удовлетворяет, например, множество $C(\omega)$.)

Теорема 2. Все ординалы конструктивны, а формула $\mathrm{Ord}(x)$ абсолютна.

$\lhd$ Второе утверждение очевидно: формулу $\mathrm{Ord}(x)$ можно, используя только ограниченные кванторы, записать как $\mathrm{Trans}(x) \wedge (\forall y \in x)\ \mathrm{Trans}(y)$ где $\mathrm{Trans}(x)$ — сокращение для формулы $(\forall y \in x)\,(\forall z \in y)\,(z \in x)$.

Докажем первое утверждение, воспользовавшись трансфинитной индукцией. Пусть нам известно, что все ординалы, меньшие α, конструктивны. Докажем, что тогда и α конструктивен. Поскольку все элементы α конструктивны, существует конструктивное множество b, расширяющее α. Нам нужно сузить b до α. Проще всего это сделать, воспользовавшись тем, что в L истинны все аксиомы ZF (кроме аксиомы бесконечности, про которую это ещё не установлено). Значит в L истинно такое следствие этих аксиом: $\forall x\,\exists\beta\,(\mathrm{Ord}(\beta) \wedge \beta \notin x)$ (напомним, что ординал β получается как объединение всех ординалов из x). Применив это утверждение к $x = b$, получим конструктивное множество β, не принадлежащее множеству b, для которого $\mathrm{Ord}_L(\beta)$. В силу абсолютности формулы $\mathrm{Ord}(\alpha)$, множество β является ординалом. Поскольку $\alpha \subset b$, ординал β не принадлежит и α. Следовательно $\beta = \alpha$ или $\beta > \alpha$. В первом случае α конструктивен, поскольку β конструктивен, во втором случае α конструктивен как элемент конструктивного множества. $\rhd$

0.2. Аксиома конструктивности и совместность аксиомы выбора и континуум-гипотезы с ZF

Установим абсолютность формулы $x = C(\alpha)$ (это нам понадобится, например, для доказательства истинности аксиомы выбора в L). Для этого обобщим понятие абсолютности на функционалы. Функционал, задаваемый формулой $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$, называется абсолютным, если внутри L формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$ определяет отображение, получающееся сужением на L отображения, определяемого ей в V. То есть, если, во-первых, формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$ абсолютна и, во-вторых, для всех $a_1, \ldots, a_n \in L$, если для некоторого $b \in V$ формула $\varphi(a_1, \ldots, a_n, b)$ истинна в V, то это b принадлежит L. Очевидно, что композиция абсолютных функционалов абсолютна (если обычным образом написать формулу, задающую эту композицию).

Формула $x = C(\alpha)$ утверждает, что для некоторого ординала $\beta > \alpha$ существует функция f, определённая на β, согласованная с рекурсивным определением $C(\tau)$. Мы знаем, что такая функция единственна; обозначим её через f_β. Обозначим через f_β^L функцию, полученную аналогичным образом, если в качестве исходной модели взять L. Покажем индукцией по β, что $f_\beta = f_\beta^L$. Если β предельный ординал, то это следует из индуктивного предположения. Если $\beta = S(\gamma)$, то по индуктивному предположению f_β и f_β^L принимают одинаковое значение на всех ординалах кроме γ. Значение же f_β и f_β^L на γ определяются через значения f_β и f_β^L на меньших ординалах, которые по индуктивному предположению одинаковы. Нетрудно убедиться, что все функционалы, $F_1, \ldots, F_N$, используемые в определении $C(\tau)$, абсолютны. Абсолютен также функционал взятия неупорядоченной пары. Абсолютны и функционалы $[\sigma, \tau]$, π_1^2, π_2^2. Поэтому $f_\beta(\gamma) = f_\beta^L(\gamma)$.

Итак, мы доказали абсолютность формулы $x = C(\alpha)$. Отсюда и из предыдущей теоремы следует, что в L истинна формула $\forall x\,\exists\alpha\,(\mathrm{Ord}(\alpha) \wedge x = C(\alpha))$. Поэтому в L истинна аксиома выбора: функция выбора сопоставляет каждому множеству элемент наименьшего порядка из этого множества.

Формулу $\forall x\,\exists\alpha\,(\mathrm{Ord}(\alpha) \wedge x = C(\alpha))$ обычно называют аксиомой конструктивности и записывают как $V = L$. Иногда её добавляют к теории множеств в качестве дополнительной аксиомы и полученную теорию обозначают ZFL. Мы показали, что если теория ZF непротиворечива, то и теория ZFL непротиворечива и что в теории ZFL выводима аксиома выбора. Заметим, что эти два утверждения финитны, однако наше доказательство этих утверждений таковым не является. Однако его можно переделать в финитное. Для этого надо изгнать отовсюду упоминание об исходной модели V и об L, а говорить вместо этого о формуле $L(x)$. Вместо истинности формулы φ в L, надо говорить о выводимости φ_L в ZF. Понятие абсолютности φ надо определять как выводимость формулы $\varphi_L \leftrightarrow \varphi$ в ZF.

Теорема 3. Пусть $(V, \in)$ есть модель ZF. Тогда семейство конструктивных множеств из V является наименьшим семейством $M \subset V$, содержащим все ординалы из V, для которого $(M, \in)$ есть модель теории ZF.

$\lhd$ Пусть M — некоторое подмножество V, содержащее все ординалы из V и такое, что $(M, \in)$ есть модель теории ZF. Докажем трансфинитной индукцией по α, что $C(\alpha) \in M$. Действительно, M, будучи моделью ZF, замкнуто относительно применения всех функционалов, с помощью которых $C(\alpha)$ определяется через меньшие ординалы. При этом вычисление значения функционала внутри M приводит к тому же результату, что и внутри V, что легко доказать по трансфинитной индукции. $\rhd$

Следующим пунктом мы докажем, что в теории ZFL выводима континуум-гипотеза CH.

Теорема 4. В теории ZFL выводима континуум-гипотеза.

$\lhd$ Нам нужно доказать, что семейство всех конструктивных подмножеств ω имеет мощность не выше ω_1 (первый несчётный ординал). Для этого достаточно доказать, что порядок любого конструктивного подмножества ω не более, чем счётен.

Сначала мы приведём доказательство с ошибкой, а затем исправим её. Основным техническим средством в доказательстве является — теорема Лёвенгейма – Сколема о спуске. Приведём её формулировку применительно к нашей ситуации.

- Пусть $(M, \in)$ — произвольная интерпретация. Пусть A — некоторое счётное подмножество M. Тогда существует счётное множество $A \subset B \subset M$ такое, что для каждой формулы $\varphi(y_1, \ldots, y_n)$ для всех $b_1, \ldots, b_n$ из B

$$M \models \varphi(b_1, \ldots, b_n) \leftrightarrow B \models \varphi(b_1, \ldots, b_n). \qquad (0.2)$$

(в частности, интерпретация $(M, \in)$ элементарно эквивалентна интерпретации $(B, \in)$).

$\lhd$ Определим возрастающую последовательность множеств $B_0, B_1, \ldots$ следующим образом. $B_0 = A$, а B_{i+1} получается из B_i следующим образом. Для каждой формулы $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$ и каждого кортежа элементов $b_1, \ldots, b_n$ из B таких, что для $M \models \exists x\,\varphi(x, b_1, \ldots, b_n)$ выберем некоторое $a \in M$, для которого $M \models \varphi(a, b_1, \ldots, b_n)$ добавим его в B_i. Полученное таким образом множество и будет B_{i+1}. Теперь положим B равным объединению всех B_i. По построению B счётно. Докажем (0.2) индукцией по построению формулы φ. Для атомарных формул (0.2) очевидно. Если $\varphi(y_1, \ldots, y_n)$ получена из более простых формул с помощью логических связок, то утверждение сразу следует из индуктивного предположения. Докажем (0.2) для формул вида $\exists x\,\psi(x, y_1, \ldots, y_n)$. Пусть $b_1, \ldots, b_n$ произвольные элементы B. Выберем любое такое i, что все они принадлежат уже B_i. Если $M \models \exists x\, \psi(x, b_1, \ldots, b_n)$, то по построению в B_{i+1} (а значит и в B) найдётся такой элемент a, что $M \models \psi(a, b_1, \ldots, b_n)$. По индуктивному предположению $B \models \psi(a, b_1, \ldots, b_n)$, следовательно $B \models \exists x\, \psi(x, b_1, \ldots, b_n)$. Обратное утверждение очевидно. $\triangleright$

Мы применим теорему Лёвенгейма–Сколема следующим образом. Нам нужно доказать истинность континуум-гипотезы в произвольной модели L теории ZFL. Обозначим через ω натуральный ряд из L. Пусть $a \subset \omega$, $a \in L$. Нам надо доказать, что порядок a не более, чем счётен. Применим теорему Лёвенгейма–Сколема к $A = \{a\} \cup \omega$ и $M = L$. Получим некоторое счётное множество $B \subset L$, содержащее a и все натуральные числа, для которого выполнено (0.2). В частности, в B истинна формула $\forall x\, \exists \beta\, (\mathrm{Ord}(\beta) \wedge x = C(\beta))$. Поэтому в B существует элемент β, для которого в B истинно $a = C(\beta)$ и $\mathrm{Ord}(\beta)$. В силу (0.2), в L также истинны формулы $a = C(\beta)$ и $\mathrm{Ord}(\beta)$. Поэтому порядок β не превосходит β. Осталось доказать, что β счётно. Допустим сначала, что B транзитивно. Поскольку $\beta \in B$, мы можем заключить, что $\beta \subset B$, следовательно, β счётно.

Что же делать, если B не транзитивно? Тогда мы преобразуем B в транзитивное множество, изоморфное B, так называемым «сжатием». Определим $f(x)$ для $x \in B$ с помощью трансфинитной рекурсии по порядку x:

$$f(x) = \{f(y) \mid y \in x\}.$$

Поскольку порядок любого элемента x меньше порядка x, это определение корректно. Докажем, что f является изоморфизмом, то есть

$$f(y) \in f(x) \leftrightarrow y \in x,$$
$$f(y) = f(x) \leftrightarrow y = x.$$

Доказывать мы будем оба утверждения вместе индукцией по паре $\langle \min(\mathrm{Od}(x), \mathrm{Od}(y)), \max(\mathrm{Od}(x), \mathrm{Od}(y)) \rangle$ (порядок на парах лексикографический). Если $y \in x$, то очевидно, что $f(y) \in f(x)$. Обратно, пусть $f(y) \in f(x)$, то есть $f(y) = f(z)$ для некоторого $z \in x$. Тогда $\mathrm{Od}(z) < \mathrm{Od}(x)$, поэтому к паре (y, z) можно применить индуктивное предположение и заключить, что $y = z$. Следовательно, $y \in x$.

Если $y = x$, то очевидно, что $f(y) = f(x)$. Обратно, пусть $f(y) = f(x)$. Докажем, что $y \subset x$ (включение $x \subset y$ доказывается аналогично). Пусть z произвольный элемент y. Докажем, что $z \in x$. Поскольку $f(z) \in f(y)$, мы имеем $f(z) \in f(x)$. Так как $\mathrm{Od}(z) < \mathrm{Od}(x)$, к паре (y, z) можно применить индуктивное предположение и заключить, что $z \in x$.

На натуральных числах (которые по построению все входят в B) функция f тождественна, что легко доказывается по индукции. Из этого следует, что $f(a) = a$. Итак f устанавливает изоморфизм между B и транзитивным множеством $B' = \{f(b) \mid b \in B\}$, содержащим a. Поскольку B' изоморфно B, утверждение (0.2) истинно и для B'. Кроме того B' транзитивно и счётно. Значит B' обладает всеми свойствами B, использованными в доказательстве счётности порядка a.

Теперь настало время указать ошибку в приведённом доказательстве. Ошибка — в смешении «внутренних» и «внешних»понятий. При построении множества B в доказательстве теоремы Лёвенгейма – Сколема, мы использовали “внешнее” понятие истинности формулы. (Напомним, что по теореме Тарского понятие истинности невыразимо формулой нашего языка.) Поэтому множество B является внешним по отношению к L: оно может не принадлежать L. В частности, B счётно только с внешней точки зрения, а внутреннее понятие счётности бессмысленно применять к B. Поэтому и счётность β внешняя: в L может не существовать взаимно-однозначного соответствия между β и ω.

Этот дефект исправляется следующим образом. На самом деле, нам достаточно теоремы Лёвенгейма – Сколема в ослабленной форме. А именно, нам нужно, чтобы (0.2) было выполнено лишь для двух формул: для формулы $\exists\beta\,(\mathrm{Ord}(\beta)\wedge x=C(\beta))$ и её подформулы $\mathrm{Ord}(\beta)\wedge x=C(\beta)$. А для любого конечного списка формул $\varphi_1,\dots,\varphi_N$ мы уже без обмана можем доказать в ZFL следующее утверждение:

- Пусть A счётно. Тогда существует счётное множество $B\supset A$ такое, что каждой формулы $\varphi\in\{\varphi_1,\dots,\varphi_N\}$ для всех $b_1,\dots,b_n$ из B выполнено

$$\varphi(b_1,\dots,b_n)\leftrightarrow\varphi_B(b_1,\dots,b_n). \qquad (0.3)$$

Здесь φ_B обозначает формулу, полученную из φ релятивизацией всех кванторов к B (квантор $\exists x$ заменяется на $(\exists x\in B)$, а квантор $\forall x$ — на $(\forall x\in B)$).

Доказательство по существу повторяет доказательство теоремы Лёвенгейма–Сколема, но только теперь мы рассматриваем лишь конечное множество формул: формулы из списка $\varphi_1,\dots,\varphi_N$ и все их подформулы (будем считать, что любая подформула любой формулы из списка также принадлежит списку). При построении B_{i+1} для каждой из формул φ_j мы заносим в B_{i+1} то a наименьшего порядка, для которого $\varphi_j(a,b_1,\dots,b_n)$ (если такое a существует). Затем по очереди для каждой из формул $\varphi_1,\dots,\varphi_N$ доказываем (0.3). При этом формулы нужно перебирать в таком порядке, чтобы все подформулы любой формулы предшествовали самой формуле. ▷

8. Доказанное утверждение финитно, и на этот раз таковым было и доказательство. Можно и просто указать вывод CH из аксиом ZFL. Прочитайте внимательно приведённое доказательство и объясните, как устроен этот вывод.

9. Докажите, что для любого бесконечного кардинала $\aleph$, если порядок любого элемента конструктивного множества x меньше $\aleph$, то порядок самого x меньше $\aleph^+$ (так обозначается наименьший кардинал, больший $\aleph$). Выведите отсюда, что обобщённая континуум-гипотеза является теоремой ZFL.