«Экологические» вычисления

B. Durand, Н. К. Верещагин, М. А. Ушаков

June 29, 2002

1 Введение

Всякому знакома ситуация, когда на твердом диске не хватает места для записи нужного файла и приходится расчищать место, рискуя стереть информацию, которая могла бы понадобиться в будущем. Резкое увеличение размеров твердых дисков, происходящее на наших глазах, в какой-то мере решает эту проблему. Однако можно смотреть на вещи и шире: для фабричного изготовления нового диска, изначально не содержащего никакой информации, надо в некотором другом месте уничтожить информацию, которая могла бы нам понадобиться в будущем (может быть очень отдаленном): ведь завод, производящий твердые диски, производит и много необратимых изменений в окружающей среде. Представим теперь себе, что состояние окружающей среды и есть исходное данное для нашего вычисления и у нас нет иного места, кроме окружающей среды (включая и все произведенные твердые диски), для выполнения вычисления. Такие вычисления мы называем *экологическими*.

В настоящей работе мы изучаем силу таких вычислений, предполагагая, что вычислительная модель есть многоленточные машины Тьюринга. Иными словами, мы предполагаем, что исходным данным для вычисления является начальное содержимое всех лент машины Тьюринга. Мы рассматриваем для простоты только проблемы разрешения, то есть результатом вычисления должны быть 0 или 1.

Обозначим $\mathbb{B} = \{0, 1\}$, $\mathbb{B}^n$ — множество двоичных слов длины n, $\mathbb{B}^*$ — множество всех конечных двоичных слов, Ω — множество бесконечных двоичных последовательностей, $\Psi = \mathbb{B}^{\mathbb{Z}}$ — множество двусторонних бесконечных двоичных последовательностей.

Мы будем рассматривать частичные и тотальные функции

$$f : (\mathbb{B}^*)^r \times \Omega^s \times \Psi^t \to \mathbb{B}, \tag{1}$$

где $r = 0, 1$ и $s + t > 0$, то есть функция имеет обязательно хоть один бесконечный аргумент и не более одного конечного аргумента. Обычное понятие вычислимости для таких функций определяется с помощью машин Тьюринга с оракулом. Такая машина имеет одну рабочую ленту, на которой в начале вычисления записано входное слово, если $r = 1$, и ничего не записано, если $r = 0$. Кроме этого, машина имеет дополнительную ленту, на которой она может написать вопрос к оракулу, то есть номер бесконечного аргумента $i \le s + t$ и номер символа бесконечного аргумента, который машина хочет узнать. Оракул немедленно пишет на ленте значение этого символа.

Для дальнейшего нам удобно иметь эквивалентное понятие вычислимости с помощью машин следующего вида. Машина имеет $r + s + t$ лент, на которых в начале вычисления записаны входные данные (ленты для записи двусторонне-бесконечных последовательностей бесконечны в обе стороны). Машина имеет также дополнительную рабочую ленту. На каждой из лент имеется читающе-записывающая головка. Среди состояний машины выделены два различных состояния s_0, s_1. Как только машина приходит в состояние s_0 (s_1) вычисление заканчивается и результат считается равным 0 (1). Мы говорим, что частичная функция указанного выше типа вычисляется машиной, если для всех исходных данных из области определения функции машина выдает результат, равный значению функции.

Наряду с этим (обычным) понятием вычислимости мы определим несколько понятий «экологически чистой» вычислимости. *Экологической* машиной Тьюринга для вычисления функции (1) будем называть машину с $r + s + t$ лентами, на которых в начале вычисления записаны входные данные.

Машина *не имеет* рабочей ленты. На каждой из лент имеется читающе-записывающая головка, двигающаяся в обе стороны. Рабочий алфавит всех лент равен входному алфавиту $\mathbb{B}$. Входное слово (если $r = 1$) ограничено двумя маркерами, в начале и в конце, лента для его записи конечна и имеет ровно столько клеток, сколько нужно для записи его и маркеров. Машина может распознавать маркеры, но не может их записывать самостоятельно, а также не может ничего записывать вместо маркеров. Мы будем рассматривать два типа лент, бесконечных в одну сторону (для записи последовательностей из Ω):
(1) Бесконечная в одну сторону лента, ограниченная маркером. Таким образом, головка, которая двигается по ленте, знает, находится ли она в начале ленты.
(2) Бесконечная в одну сторону лента, не ограниченная маркером. Таким образом, головка, которая двигается по ленте, не знает, находится ли она в начале ленты; если головка находится в начале ленты и получает команду сдвинуться за край, происходит безрезультатная остановка; назовем такую ленту *обрывающейся*.

Как обычно, машина имеет управляющее устройство, имеющее конечное число внутренних состояний и управляющее головками. В начале работы все головки находятся в началах своих лент (в ячейке с номером 0 для неограниченных лент) и управляющее устройство находится в выделенном начальном состоянии.

В случае обычного понятия вычислимости машина Тьюринга, получавшая вход на ленте, могла, не стирая входа, использовать тот же участок ленты в качестве рабочего пространства за счёт того, что её рабочий алфавит может быть больше входного. Экологически чистая машина лишена этого: для неё рабочий алфавит всегда совпадает с входным. Обычная машина может пометить первую клетку ленты специальным маркером, поэтому в обычной модели нет нужды различать обрывающиеся ленты и ленты с маркером. Также обычная машина может моделировать бесконечную в две стороны ленту на односторонне-бесконечной. Экологическая машина не может без ущерба для исходных данных ни пометить начало ленты, ни моделировать бесконечную в обе стороны ленту на бесконечной в одну сторону ленте.

Возможности экологической машины кажутся сильно ограниченными: чтобы провести какое-то вычисление машина должна что-то записывать на ленте, уничтожая тем самым часть исходного данного. Тем самым представляется правдоподобной гипотеза, что экологическая модель вычислений слабее обычной. Оказывается, что это совсем непросто доказать. Например, нам не удалось выяснить, эквивалентны ли экологические машины, имеющие ровно две бесконечных ленты, ограниченных маркером, обычным машинам ($s \geq 2$, t, r произвольны). Более того, в некоторых случаях эта гипотеза просто неверна: мы можем это доказать для машин имеющих не менее трех лент с граничным маркером: в этом случае эклогические машины эквивалентны обычным (теорема 6). А вот в каких случаях нам удалось доказать гипотезу:
если $s = 1$, $t = 0$, $r = 0, 1$ и бесконечная лента ограничена маркером и,
если s, t, r произвольны, но машина не имеет бесконечных лент ограниченных маркером (теорема 5).

2 Всюду определенные функции

Для всюду определённых функций из Ω в $\mathbb{B}$ модель экологически чистых вычислений эквивалентна обычной. Машины, способные вычисляють такие функции, имеют одну ленту, бесконечную в одну сторону, обрывающуюся или с маркером. Мы покажем, что всюду определённая функция бесконечной строки на самом деле зависит лишь от конечного числа позиций в этой строке.

Теорема 1 *Пусть функция $f\colon \Omega \to \mathbb{B}$ всюду определена и вычислима обычной машиной Тьюринга. Тогда она вычислима и экологической машиной с обрывающейся или ограниченной маркером лентой.*

Доказательство. Рассмотрим обычную машину Тьюринга, вычисляющую данную всюду определённую функцию. Назовём (конечную) строку плохой, если, начав работу на этой строке, машина когда-либо выйдет за её пределы. Теперь построим дерево всех конечных строк и пометим в нём плохие строки. Предположим, оказалось, что плохих строк бесконечно много. Тогда (поскольку начало плохой строки также плохое) на любом уровне дерева будет хотя бы одна помеченная вершина.

Следовательно, по теореме о компактности, существует бесконечный путь из отмеченных вершин. У бесконечной строки, соответствующей этому пути, все начала будут плохими. Значит, если запустить нашу машину на этой бесконечной строке, она выйдет за любую клетку ленты, и, следовательно, никогда не остановится.

Полученное противоречие показывает, что множество плохих строк конечно, а значит, машина никогда (независимо от входа) не выходит дальше некоторой клетки ленты. Значит, любая всюду определённая функция зависит только от конечно числа клеток.

Это позволяет нам построить экологически чистую машину, вычисляющую данную всюду определённую функцию. Для этого необходимо записать в её программу таблицу ответов на все возможные значения тех клеток ленты, от которых зависит значение функции. □

Утверждение теоремы переносится очевидным образом и на всюду определенныей функции вида $f\colon \Omega^s \times \Psi^t \to \mathbb{B}$. Любые вычислимые функции такого типа зависят только от конечной части входных последовательностей, а поэтому вычислимы экологическими машинами с обрывающейся лентой.

Теперь рассмотрим всюду определенные функции $f\colon \mathbb{B}^* \times \Omega^s \times \Psi^t \to \mathbb{B}$. Такие функции могут вычисляться экологическими машинами с одной конечной лентой, s бесконечными в одну сторону лентами и t двусторонне-бесконечными лентами. Напомним, что мы предполагаем, что $s+t>0$. Если все односторонне-бесконечные ленты обрывающиеся, то экологическая модель оказывается слабее обычной.

Теорема 2 *Для всех s,t $(s+t>0)$ существует всюду определенная функция $f\colon \mathbb{B}^* \times \Omega^s \times \Psi^t \to \mathbb{B}$, вычислимая в обычной модели вычислений, но не вычислимая никакой экологической машиной с обрывающимися односторонне-бесконечными лентами.*

Доказательство. Докажем сначала утверждение для случая $s=1$, $t=0$. Рассмотрим функцию $f(x,\alpha)$, определяемую так. Пусть слово x имеет длину k. Обозначим слово, которое составлено из первых k^2 символов α через y. Пусть, начиная от позиции k^2 в α, следующие $\lceil \log_2(k^2+k) \rceil$ битов задают целое число n. Тогда $f(x,\alpha)$ равно символу номер $n \bmod (k+k^2)$ конкатенации слов x и y. Эта функция, очевидно, вычислима в обычной модели вычислений. Докажем, что она не вычислима в экологически чистой модели.

Неформально, машина не может вычислить функцию f, поскольку во время движения головки к тому месту, где записано n, машина должна хранить не только всю информацию об α, но и информацию о расстоянии, которое ей осталось пройти до начала записи n. Для воплощения этой идеи в строгом доказательстве, удобно использовать понятие колмоговской сложности, формализующее понятие количества информации.

Колмогоровской сложностью слова w, $K(w)$, называется длина кратчайшей программы, которая печатает w. При этом способ записи программ (и соответствующую ему колмогоровскую сложность K_0) можно выбрать оптимальным, то есть таким, что для любого другого способа записи (и соответствующей колмогоровской сложности K_1) можно найти такую константу c, что $K_0(w) \le K_1(w)+c$ для всех w. Аналогичным образом, можно определить сложность натуральных чисел, пар слов, пар натуральных чисел и т.д. В силу соображений мощности в любом конечном множестве A найдется элемент w с $K(w) \ge \log_2|A|$, такие элементы называются *случайными элементами* A. Подробнее см. [4].

Рассмотрим достаточно большое k и случайную тройку $\langle x,y,P\rangle$, где x — слово длины k, y — строка длины k^2, а P — натуральное число от 1 до k^2. Запустим машину на входе x и ленте, содержащей y, за ней некоторое число n, а дальше нули, и рассмотрим момент, когда головка машины впервые выходит за позицию P. Если машина никогда не выходит за эту позицию, то машина ошибается, так как число n (до которого она не доходит) может указывать как на бит в xy равный 0, так и бит, равный 1.

Пусть состояние машины в рассматриваемый момент равно q, позиция головки на конечной ленте равно l, а ее содержимое равно w, часть бесконечной ленты до позиции P равна a, а часть бесконечной ленты от позиции P до позиции k^2 равна b. Через ba обозначим конкатенацию строк b и a. Мы докажем, что по четверке $\langle ba,q,l,w\rangle$ можно восстановить xy и P. Поскольку тройка $\langle x,y,P\rangle$ случайна, ее сложность не меньше $k+k^2+2\log_2 k$, в то время как сложность исходных данных не превосходит $k+k^2+\log_2 k+\text{const}$. Этого не может быть, поэтому теорема будет доказана, как только мы покажем, что xy и P действительно можно восстановить.

Для того, чтобы мы смогли моделировать вычисления машины, надо знать, где проходит граница между b и a. Если мы это знаем, мы можем, подставляя в следующие клетки ленты последовательно все числа от 1 до $k+k^2$, провести вычисления для каждого случая и получить все биты xy.

Однако, даже если мы не знаем правильного разделения на a и b, мы можем проводить вычисления, выбрав какое-нибудь разделение a' и b'. Выбрав какое-то разделение, будем запускать машину $k+k^2$ раз предполагая, что слева от головки записано ba а справа b', а после одно из чисел от 1 до $k+k^2$, а дальше нули, и составляя из ответов машины строку $x'y'$.

Предположим, что мы так выбрали неправильное разделение, что b получилось слишком длинным. Тогда соотношение между правильной и неправильной лентой выглядит так (!!! надо исправить рисунок, обрезав слева правильную ленту !!!):

Правильная лента

	a	b	n	

Неправильная лента

b	a	b	a_2	n	

Здесь $a_2a_1 = a$, $b' = ba_2$ и головка машины установлена между a и b на правильной ленте, и между ba и b на неправильной. Заметим, что машина ещё ни разу не бывала правее её текущей позиции и никогда не выйдет за левый конец a (поскольку в нашей модели вычислений машина не имеет права пытаться выйти за пределы ленты). Поэтому её поведение не будет отличаться от поведения на строке aba_2n. Поскольку машина правильно решает задачу, она рассматривает отрезок длины $l = \lceil\log_2(k+k^2)\rceil$, начинающийся после ab, как номер позиции, и выдаёт символ в этой позиции в строке xy. В нашем случае в качестве номера позиции будет рассматриваться начало длины l строки a_2n. Поскольку мы предположили, что разделение выполнено неправильно, a_2 непусто, и поэтому последние несколько битов n (а возможно, даже и все) не будут учитываться. Если теперь перебрать все возможные значения n, то ответ машины не будет зависеть от нескольких последних битов n. Это можно легко проверить. Заметив это, можно понять, что разбиение выполнено неправильно, поскольку мы предполагали, что строка xy случайна, и поэтому не может состоять из блоков, состоящих, в свою очередь, из одних нулей или одних единиц (иначе xy можно описать не более, чем $|xy|/2$ битами, а, следовательно, и описать тройку $\langle x, y, P\rangle$ примерно $(k+k^2)/2$ битами).

Таким образом, если наше b' выбрало слишком длинным, мы сможем это заметить. Теперь достаточно взять сначала самое длинное b', какое только возможно (соответствующее пустому a'), потом на единицу короче, и т.д., — и продолжать так пока описанная процедура проверки говорит, что b' слишком длинное. Самое длинное b', которое выдерживает такую проверку, и будет правильным.

Найдя правильное разбиение на a и b, мы также найдём и правильное значение P (как длину a). После этого мы можем подставить в качестве n все числа от 1 до $k+k^2$, и получить строку xy. Итак, по четверке $\langle ba, q, l, w\rangle$ сложности не больше $k+k^2+\log_2 k+c$ мы получили тройку $\langle x, y, P\rangle$ сложности не меньше $k+k^2+2\log_2 k$. Значит, машины, решающей рассматриваемую задачу в экологически чистой модели вычислений, не существует.

Теперь перейдем к всюду определенным функциям $f : \mathbb{B}^* \times \Psi \to \mathbb{B}$, Такие функции могут вычисляться машинами с одной конечной лентой и одной бесконечной в обе стороны лентой. Функция f определяется аналогично: пусть слово x имеет длину k. Слово y теперь будет составлено из символов α с номерами от $-k^2$ до k^2 (напомним, что теперь α бесконечна в обе стороны). А число n теперь будет находится в интервале от 1 до $k+2k^2+1$. В доказательстве надо сделать следующее изменение. Число P, как и раньше, берется в интервале 1 до k^2 и мы рассматриваем первый момент, когда головка на бесконечной ленте удаляется от начала на расстояние P (в любую сторону). Все остальное совершенно аналогично.

Перейдем теперь к общему случаю. Для данных s, t с $s+t>0$ нам нужно определить всюду определенную вычислимую, но не вычислимую никакой экологической машиной, функцию $f : \mathbb{B}^* \times \Omega^s \times \Psi^t \to \mathbb{B}$. Эта функция определяется аналогично предыдущим. Значение f на $x, \alpha_1, \ldots, \alpha_{s+t}$ равно n-ому символу слова $z = xy_1 \ldots y_{s+t}$. Здесь y_i есть начало длины k^2 последовательности α_i, если $i \le s$, и y_i есть слово, составленное из символов последовательности α_i с номерами от $-k^2$ до k^2, если $i > s$, где $k = |x|$, а n определяется следующим образом. Положим n_i равным числу, записанному на ленте номер i в позициях с k^2+1 по $k^2+\lceil\log_2|z|\rceil$. Тогда n равно сумме всех n_i по модулю $|z|$.

В доказательстве происходят следующие изменения. Мы выбираем случайный кортеж $\langle x, y_1, \ldots, y_{s+t}, P\rangle$. Число P, как и раньше, берется в интервале 1 до k^2 и мы рассматриваем момент, когда в первый раз одна из головок на бесконечных лентах удаляется от начала на расстояние P (в любую сторону). Для каждой из лент мы рассматриваем слова a^i и b^i, определяемые так же, как и раньше: a^i есть содержимое бесконечной ленты номер i в этот момент в позициях от 1 (от $-k^2$, если лента номер i бесконечна в обе стороны) до текущего положения головки, а b^i есть содержимое бесконечной ленты номер i в этот момент от текущей позиции головки до позиции k^2. q, l, w определяются так же, как и раньше. Чтобы получить противоречие нам нужно доказать, что по q, l, w и $b_1a_1, \ldots, b_{s+t}a_{s+t}$ можно восстановить z и P. Для этого мы по очереди для каждого i находим a_i и b_i. Это можно сделать так. Перебираем возможные разбиения b_ia_i на a'_i и b'_i, начиная с самого длинного b'_i. Для каждого из разбинений мы запускаем машину, помещая на всех лентах, кроме ленты номер i, строки $b_1a_1, \ldots, b_{s+t}a_{s+t}$ и перед головками, и после них. А на ленте номер i перед головкой записываем b_ia_i, а после нее b'_in (для всевозможных $n \le |z|$). Если b'_i выбрано слишком длинным, слово z', найденное нами в результате моделирования машины, будет состоять из блоков нулей и единиц. Ясно, что если разбиение выбрано правильно, то слово z', найденное нами, будет просто циклическим сдвигом правильного слова z, и поэтому не может состоять из блоков нулей и единиц. □

Можно доказать, что и при некотором фиксациии агрументов $\alpha_1, \ldots, \alpha_{s+t}$ функция $f(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_{s+t})$, определенная в доказательстве теоремы 2, не вычислима в той же экологической модели.

Теорема 3 *Существуют последовательности $\alpha_1, \ldots, \alpha_{s+t}$ такия, что функция $f(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_{s+t})$ не вычислима никакой экологической машиной без концевых маркеров, на лентах которой перед началом вычислений написаны $\alpha_1, \ldots, \alpha_{s+t}$.*

Доказательство. Приведем доказательство для случая односторонней бесконечной последовательности. В остальных случаях доказательство аналогично.

Будем использовать диагонализацию. Перенумеруем все экологически чистые машины: $M_1, M_2, M_3, \ldots$.

Лемма 1 *Существуют такие x, z, что для любого α, продолжающего z, либо машина M_1 не останавливается на входе $\langle x, \alpha\rangle$, либо останавливается и дает неверный результат.*

Доказательство. Выберем k, x, y, P такими, как в доказательстве предыдущей теоремы, и рассмотрим два случая.

Первый случай: найдется такое n, что для любой последовательности β, если на бесконечной ленте записать y, затем n, а затем символы из β, а на конечной ленте написать x, то машина не остановится или попытается выйти за край ленты. В этом случае положим $z = yn$.

Второй случай: для всех n существует последовательность β такая, что если на бесконечной ленте записать y, затем n, а затем символы из β, а на конечной ленте написать x, то машина остановится, не пытаясь выйти за край ленты. Докажем, что в этом случае существуют n, β такие, что машина на входе $x, yn\beta$ попытается выйти за край ленты или выдаст неправильный результат. Ясно, что при этом машина прочтет лишь некоторое конечное начало v последовательности β и в качестве z мы сможем взять слово ynv. Допустим противное: для всех n, β, если машина останавливается на входе $x, yn\beta$, не пытаясь выйти за край ленты, то она выдает правильный результат. Тогда, повторяя с небольшими изменениями рассуждения из доказательства предыдущей теоремы, мы можем показать, что по $\langle ba, q, l, w\rangle$ можно найти xy. Как и раньше, пробуем все разбиения ba на две части $b'a'$, начиная с пустого a'. Для каждого разбиения пробуем все n и для каждого из них ищем такую последовательность β, что если на ленте написать a' (а не ba, как раньше), затем b', затем n, а затем β, и головку установить между a' и b', то машина остановится (возможно, пытаясь выйти за начало ленты). Назовем разбиение допустимым, если для каждого n такое β нашлось. По условию, правильное разбиение допустимо, причем после остановки машина выдаст правильный результат (какое бы β мы не нашли). Кроме того, допустимы все разбиения, в которых a' выбрано слишком коротким. Как и в доказательстве предыдущей теоремы, такие разбиения легко отвергнуть, поскольку для них либо машина пытается выйти за край ленты (для хотя бы одного n), либо результаты работы машины дают y, состоящий из блоков одинаковых цифр. Таким образом, начиная с пустого a', мы пробуем доказать, что текущее разбиение допустимо, и если это удалось, то смотрим, не отвергается ли оно. Первое неотвергнутое допустимое разбиение и будет правильным. □

Очевидно, утверждение леммы справедливо не только для M_1, но и для любой другой экологической машины M_i. Кроме того, строка z, существование которой утверждает лемма может быть выбрана как продолжение любой данной строки z_0. Действительно, все что нам нужно от $\langle x, y, P\rangle$, это, чтобы сложность этой тройки была больше $k+k^2+\log_2 k+\mathrm{const}$. Если y брать не произвольным, а требовать, чтобы оно продолжало фиксированную строку z_0, то логарифм количества возможных троек $\langle x, y, P\rangle$ уменьшится на $|y_0|$, то есть на константу, и станет равным $k+k^2+2\log_2 k-|y_0|$, что все равно намного больше, чем $k+k^2+\log_2 k+\mathrm{const}$, при достаточно больших k.

Теперь мы обманываем первую экологическую машину, находя подходящие x_1, z_1, затем обманываем вторую машину, находя подходящие x_2, z_2 так, что z_2 продолжает z_1 и т.д. В качестве α берем общее продолжение всех $z_1, z_2, \ldots$. □

Представляется весьма правдоподобным, что функции, определенные в доказательстве теоремы 2, не вычислимы и никакими экологическими машинами с лентнами, ограниченными маркерами. Однако этого нам доказать не удалось. С помощью более сложного контрпримера можно все-таки доказать, что экологические машины с одной бесконечной лентой с концевым маркером слабее обычных машин.

Теорема 4 *Существует тотальная вычислимая функция $f : \mathbb{B}\times\Omega \to \mathbb{B}$, не вычислимая никакой экологической машиной с бесконечной лентой с концевым маркером.*

Доказательство. Функция f определяется почти так же, как в доказательстве теоремы 2. Разница лишь в том, что вместо k^2 мы берем некоторую вычислимую функцию $g(k)$, которая достаточно быстро растет. Насколько быстро, будет видно в дальнейшем.

Допустим, что так определенная функция f вычислима некоторой экологической машиной. Фиксируем некоторое большое k и слова x, y длин $k, g(k)$. Пусть слово xy содержит как 0, так и 1. Тогда при работе машины на входе x, y в некоторый момент t головка на бесконечной ленте добирается до $g(k)+1$-ой ячейки. Докажем, что t существенно больше, чем $g(k)$.

Будем рассматривать нашу машину M, как одноленточную машину M' с $\mathrm{const}\cdot k\cdot 2^k$ состояниями (состоянием новой машины является кортеж, состоящий из состояния старой машины, содержимого конечной ленты и положения головки на конечной ленте).

Лемма 2 *Если машина Тьюринга с односторонней лентой и Q состояними останавливается при всех начальных содержимых ленты и при некотором содержимом в первый раз в момент t доходит до m-ой ячейки, то $t \geq m(\log_2 m - 1)/2\log_2 Q$.*

Доказательство. Пусть i граница между двумя ячейкам слева от m. Рассмотрим исходное данное, для которого вычисление приходит в первый раз в момент t ячейку номер m. Рассмотрим в этом вычислении последовательность состояний машины, в которых она пересекает границу i (мы рассматриваем вычисление вплоть до момента t). Эта последовательность называется *следом на границе*[1] i. Мы докажем, что следы на разных границах разные (как последовательности). Поэтому в среднем след должен иметь длину порядка $\log_2 m/\log_2 Q$, а поскольку t равно сумме всех следов, оно не может быть существенно меньше $m\log_2 m/\log_2 Q$.

Допустим следы на границах i и $i+j$ совпадают и равны последовательности $q_1, \ldots, q_l$. Пусть u часть начального содержимого ленты, записанного от первой позиции до границы i, а v — часть начального содержимого ленты, записанная между границами i и $i+j$. Мы утверждаем, что при начальном содержимом ленты, равном $uvvv\ldots$ машина будет работать бесконечно, уходя вправо. Действительно, рассмотрим исходное вычисление, обозначим его C, и пусть $t_1, \ldots, t_l$ моменты, в которые головка пересекает границу i, а $s_1, \ldots, s_l$ моменты, в которые головка пересекает границу $i+j$. Обозначим через $C[a, b]$ кусок вычисления C от момента a до момента b, то есть последовательность

[1] Понятие следа использовалось в [2, 3] для доказательства того, что одноленточные машины Тьюринга с записью входа на ленте не могут распознавать симметрию входного слова x за $o(|x|^2)$ шагов. Похожим на наш способом понятие следа использовалось В.Н. Агафоновым [1] для доказательства того, что если одноленточныая машины Тьюринга с записью входа на ленте распознает некоторый язык за время $o(|x|\log|x|)$, то этот язык регулярен.

сдвигов головки, состояний и записываемых символов. Тогда вычисление C' при начальном содержимом $uvvv\dots$ будет "склеено" следующим способом из кусков вычисления C:

$$\begin{aligned}C' = &C[1,t_k]C[t_k,s_1]\\ &C[t_1,t_2]C[s_2,s_3]C[t_3,t_4]\dots C[t_{k-2},t_{k-1}]C[s_{k-1},s_k]C[t_k,s_1]\\ &C[t_1,t_2]C[s_2,s_3]C[t_3,t_4]\dots C[t_{k-2},t_{k-1}]C[s_{k-1},s_k]C[t_k,s_1]\\ &\dots,\end{aligned}$$

где k — это наибольшее такое число, что $t_k < s_1$. Проверим это. До момента t_k вычисление C' ничем не отличается от вычисления C: $C'[1,t_k] = C[1,t_k]$, поскольку головка до момента t_k ни разу не пересекает границу $i+j$. Более того, $C'[t_k,s_1]$ также равно $C[t_k,s_1]$. Поэтому и содержимое ленты от начала до границы $i+j$ в обоих вычислениях совпадают (до шага s_1). Дальше C' и C могут различаться.

Далее в вычислении C' головка в первый раз выходит за границу $i+j$ в состоянии q_1. Поскольку между $i+j$ и $i+2j$ записано v, вычисление C' дальше совпадает с вычислением C от момента t_1 до момента t_2, а значит дальше головка в состоянии q_2 пересекает границу $i+j$ в направлении к началу ленты (справа налево). Она видит в границах от i до $i+j$ то, что было записано в этой зоне в вычислении $C[t_k,s_1]$ и возвращается первый раз в эту зону в том же состоянии q_2, что и в вычислении C в момент s_2 (здесь мы в первый раз использовали совпадение следов). Поэтому дальше вычисление C' будет равно $C[s_2,s_3]$ и головка выйдет вправо за границу $i+j$ в состоянии q_3. В зоне между $i+j$ и $i+2j$ она встретит то, что было записано в зоне $[i,i+j]$ в вычислении $C[t_1,t_2]$ (а в тех местах, где головка не побывала, сохранившиеся символы слова v) и поэтому дальше C' равно $C[t_3,t_4]$. И так далее.

После момента t_k в вычислении C' головка будет находиться в зоне $[i:i+2j]$, пересекая границу $i+j$ ровно k раз в состояниях $q_1,q_2,\dots,q_k$. После этого она в первый раз пересечет границу $i+2j$ в состоянии s_1. Вот как выглядит вычисление C' вплоть до этого момента (между кусками вычисления C мы указали границу, пересекаемую головкой, направление пересечения и состояние головки в момент пересечения):

$$\begin{aligned}C' = &C[1,t_k]^{i}_{\vec{q}_n}C[t_k,s_1]^{i+j}_{\vec{q}_1}\\ &C[t_1,t_2]^{i+j}_{q_2}C[s_2,s_3]^{i+j}_{\vec{q}_3}C[t_3,t_4]^{i+j}_{q_4}\dots C[t_{k-2},t_{k-1}]^{i+j}_{q_{k-1}}C[s_{k-1},s_k]^{i+j}_{\vec{q}_k}C[t_k,s_1]^{i+2j}_{\vec{q}_1}.\end{aligned}$$

(!!! поставить стрелки влево над непомеченными состояниями !!!) Чтобы доказать, что это действительно так, можно оставить в C' только куски $C[1,t_k]$, $C[t_k,s_1]$, $C[s_2,s_3]$, …, $C[s_{k-1},s_k]$, проходящие на зоне $[1:i+j]$. Легко убедиться, что эта часть C' совпадает с вычислением $C[1,s_k]$ внутри этой зоны. А оставив остальные куски $C[t_1,t_2]$, $C[t_3,t_4]$, …, $C[t_{k-2},t_{k-1}]$, $C[t_k,s_1]$, проходящие в зоне $[i+j:i+2j]$, мы можем убедиться, что вычисление C' в зоне $[i+j:i+2j]$ совпадает с вычислением $C[1.s_1]$ в зоне $[i:i+j]$. Отсюда следует, что содержимое зоны $[i+j;i+2j]$ к моменту первого пересечения границы $i+2j$ в вычислении C' будет таким же, как содержимое зоны $[i;i+j]$ к моменту первого пересечения границы $i+j$ (в момент s_1) в вычислении C. Поэтому дальше повторится цикл

$$^{i+2j}_{\vec{q}_1}C[t_1,t_2]^{i+2j}_{q_2}C[s_2,s_3]^{i+2j}_{\vec{q}_3}C[t_3,t_4]^{i+2j}_{q_4}\dots C[t_{k-2},t_{k-1}]^{i+2j}_{q_{k-1}}C[s_{k-1},s_k]^{i+2j}_{\vec{q}_k}C[t_k,s_1]^{i+3j}_{\vec{q}_1}.$$

И так до бесконечности.

Поскольку количество следов длины меньше l не превосходит Q^l, по крайней мере для половины границ след имеет длину не мешьше $\frac{\log_2 m-1}{\log_2 Q}$. □

Итак, мы доказали, что для любых x,y, кроме тождественно нулевого или тождественно единичного y, исходная машина M достигает $g(k)$-ую ячейку за не менее, чем $\frac{g(k)(\log_2 g(k)-1)}{2(k+\log_2 k+\text{const})}$ шагов. Все конфигурации, пройденные машиной до этого момента, различны, иначе она зацикливается (в конфигурацию включается: состояние машины, содержимое конечной ленты и содержимое первых $g(k)$ ячеек бесконечной ленты, положения головок на обеих лентах). Кроме того, для разных пар x_1,y_1 и x_2,y_2 множества конфигураций, пройденных до первого посещения ячейки номер $g(k)+1$, не пересекаются, поскольку запустив машину в любой такой конфигурации и пробуя всевозможные n, мы можем восстановить x,y.

Получается, что общее число пройденных конфигураций (для всех x, y) не меньше

$$\frac{(2^{k+g(k)}-2)g(k)(\log_2 g(k)-1)}{2(k+\log_2 k+\mathrm{const})}$$

С другой стороны общее число вообще всех конфигураций равно

$$\mathrm{const}\cdot 2^{k+g(k)}kg(k).$$

Видно, что, например, при $g(k)=2^{k^3}$ мы получаем противоречие, если k достаточно велико. □

3 Не всюду определенные функции

Для частичных функций мы можем доказать, что экологическая модель слабее обычных машин Тьюринга уже для $r=0$ (то есть без конечного входа), если лент с конечными маркерами либо вообще нет, либо только одна, но при этом нет других бесконечных лент.

Теорема 5 *Для всех s, t существует частичная функция $g : \Omega^s \times \Psi^t \to \mathbb{B}$, вычислимая в обычной модели, но не вычислимая никакой экологической машиной с обрывающимися лентами. Также существует частичная функция $g : \Omega \to \mathbb{B}$, вычислимая в обычной модели, но не вычислимая никакой экологической машиной с односторонне бесконечной лентой, ограниченной маркером.*

Доказательство. Для данного слова из 0 и 1 обозначим через $\bar{x}$ слово $00\ldots01x$ (количество нулей равно длине x). Функция g определена на всех последовательностях, в которых в $\alpha_1(i)=1$ хоть для одного $i\geq 1$. Для любой такой последовательности α_1 существуют единственные x, i такие, что $\alpha_1(1)\alpha_1(2)\ldots\alpha_1(i)=\bar{x}$. Вырежем из α_1 кусок $\bar{x}$, и обозначим через β оставшуюся часть α_1. Функция g принимает значение, равное $f(x,\beta,\alpha_2,\ldots,\alpha_{s+t})$, где f функция, определенная в доказательстве теоремы 2, в определении которой вместо k^2 надо взять 2^{2k} (поскольку теперь запись x занимает примерно $2k$ ячеек, а не k, как раньше, и логарифмического зазора не хватит). Доказательство переносится почти без изменений.

Аналогично доказывается второе утверждение. □

4 Когда экологические машини эквивалентны по силе обычным

(Эту идею сообщил нам Ан. А. Мучник.) В этом разделе мы рассмотрим экологические машины с не менее, чем тремя односторонне-бесконечными лентами с граничными маркерами. В этой модели оказывается вычислимой любая вычислимая функция.

Теорема 6 *Любая частичная вычислимая функция $f\colon (\mathbb{B}^*)^r \times \Omega^s \times \Psi^t \to \mathbb{B}$ при $s \geq 3$ вычислима экологической машиной с 3 лентами с маркерами и $s-3$ односторонне-бесконечными лентами без маркеров.*

Доказательство. Проведем доказательство для $r=0$. Для $r=1$ рассуждение аналогично.

Сперва определим вспомогательную модель вычислений — вариант машин со счётчиками. Машина состоит из управляющего устройства с конечным числом состояний и n счётчиков, содержащих натуральные числа. Управляющее устройство может давать счётчикам команды «увеличить на 1», «уменьшить на 1» (уменьшение не изменяет значения счетчика, если оно было равно 0), и спрашивать, равно ли значение нулю. Входом такой машины является s односторонне-бесконечных двоичных последовательностей, записанных на s обрывающихся лентах и t двусторонне-бесконечных двоичных последовательности, записанных на t двусторонне-бесконечных лентах (больше никаких лент нет). На каждой из этих лент имеется читающая (но не записывающая) головка. Будем называть далее такие машины *счетчиковыми*, или машинами с n счетчиками. Можно кратко сказать, что машина с n счетчиками — это экологическая машина с обрывающимися лентами, которой разрешено пользоваться n счетчиками, но запрещена запись на лентах.

Лемма 3 *Для некоторой константы n любая частичная вычислимая функция $f\colon \Omega^s \times \Psi^t \to \mathbb{B}$ вычислима на машине с n счётчиками.*

Доказательство. Ясно, что имея достаточный набор вспомогательных счётчиков, можно складывать, умножать и делить числа, содержащиеся в двух данных счётчиках (например, сложение чисел в счётчиках A и B сводится к увеличению значения A одновременно с уменьшением значения B до тех пор, пока B не станет равным нулю; аналогично выполняется вычитание, а умножение и деление сводятся к сложению и вычитанию). Поэтому можно проверить простоту числа, а также находить простые числа в порядке возрастания.

Теперь надо в некотором специальном счётчике хранить состояние ленты машины Тьюринга. Это можно делать, закодировав все символы ленточного алфавита числами, и храня в счётчике число $2^{t_1}3^{t_2}5^{t_3}\dots p_N^{t_N}$, где 2, 3, $\dots$, p_N — простые числа, а t_1, t_2, $\dots t_N$ — последовательные коды содержимого клеток ленты. Когда машина выходит за пределы известной ей части ленты, она должна запросить очередной символ из входной последовательности, выполнив соответствующую команду. □

Ясно, что можно считать, что в любой момент вычисления счетчиковой машины только одна из головок не находится в начале ленты (в ячейке номер 1): можно запоминать в счетчиках положение головок на лентах и держать головки в начале ленты; когда же понадобится узнать, какой символ видит данная головка, ее можно сдвинуть в указанное место, а затем вернуть в начало. Будем называть такие машины *корректными*, а ту головку, которая не находится в начале ленты, называть *активной* в данный момент. Если все головки находятся в начале ленты, то мы считаем активной ту из них, которая последняя была не в начале ленты. В начальный момент активной считаем первую головку.

Лемма 4 *Любая вычислимая функция $f\colon \Omega^3 \to \mathbb{B}$ вычислима на корректной машине с двумя счётчиками.*

Доказательство. По предыдущей лемме существует корректная машина с n счетчиками, вычисляющая f. Закодируем значения счетчиков в одно число $S = 2^{c_1}3^{c_2}\dots p_n^{c_n}$, где, как и прежде, p_i — i-е простое число; c_i — значение i-го счётчика. Число S будет храниться в первом из двух счётчиков. Второй будет использоваться для промежуточных вычислений.

Теперь надо научиться моделировать операции со счётчиками. Увеличение и уменьшение счётчика на единицу соответствует умножению или делению числа S на одно из конечного набора простых чисел (от 2 до p_n). Это делается так (для примера рассмотрим умножение): в цикле пока счётчик 1 не равен нулю, уменьшаем его значение на единицу, и увеличиваем значение счётчика 2 на единицу p_i раз. □

Итак, нам осталось преобразовать корректную машину M_1 с двумя счетчиками c_1, c_2, вычисляющую f, в экологически чистую машину M_2, вычисляющую f. Моделирование устроено так. Машина M_2 не будет ничего писать на лентах, но тем не менее будет двигать головки на них. Положение активной головки M_1 равно положению соответствующей головки M_2. Положения каких-то двух неактивых головок M_2 на бесконечных лентах с маркерами будут равны значениям счетчиков c_1, c_2. При этом M_2 в каждый момент помнит, положения каких головок соответствуют значениям счетчиков, и знает, значения каких счетчиков равны нулю (здесь мы используем то, что машина имеет информацию, находится ли головка в начале ленты).

Моделирование происходит очевидным образом:

1) когда M_1 изменяет значение одного из счетчиков, M_2 двигает соответствующую головку;

2) когда M_1 двигает активную головку, M_2 делает то же самое;

3) если все головки M_1 находятся в начале, и M_1 сдвигает одну из неактивных головок на ленте без маркера, то M_2 делает то же самое;

4) неразобранным осталось только одно действие M_1: в ситуации, когда все головки M_1 находятся в начале, M_1 сдвигает одну из двух неактивных головок на ленте с маркером (пусть это будет первая головка). В этом случае M_2 делает следующее. Пусть ее первая головка хранит, скажем, содержимое счетчика c_1. Хотя бы одна из 3 лент с маркерами в данный момент не используется для хранения счетчиков. Пусть это будет вторая лента. Тогда M_2 назначает вторую ленту для хранения c_1 и "копирует c_1", то есть, сдвигает вторую головку, в ту же позицию, где была раньше первая головка, а первую головку перемещает в начало (здесь мы используем вторично то, что машина имеет информацию,

находится ли головка в начале ленты). Затем M_2 делает то же, что M_1, то есть, сдвигает первую головку на одну клетку. $\square$

5 Открытые вопросы

Многие вопросы о соотношении силы экологических и обычных машин остаются открытыми. Сформулируем некоторые из них.

1. Что можно сказать о силе экологических машин с двумя односторонними лентами с маркерами?

2. Являются ли экологические машины с не менее чем двумя бесконечными лентами, среди которых ровно одна лента одностороннe-бесконечная и ограничена маркером, слабее обычных машин?

3. Рассмотрим машины с конечным входом ($r = 1$), время работы которых ограничено некоторым полиномом от длины этого входа. Эквиваленты ли полиномиальные по времени экологические машины обычным полиномиальным машинам? Теоремы 2 и 3 дают частичный ответ на этот вопрос. А вот в теореме 6 моделирование имело экспоненциальное замедление.

4. Что можно сказать о силе экологических РАМ (равнодоступных адресных машин)? Исходным данным такой машины является бесконечная последовательность натуральных чисел, хранящихся в ее регистрах, и никаких ограничений на машины нет.

References

[1] В.Н. Агафонов. Сложность алгоритмов и вычислений: Спецкурс для студентов НГУ, часть 1. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1975.

[2] Я.М. Барздинь. Сложность распознавания симметрии на машинах Тьюринга. Проблемы Кибернетики, вып. 15 (1965), 245–248.

[3] F.C. Hennie. One tape off-line Turing machine computations. Information and Control, 8:6 (1965) 553–578.

[4] M. Li, P. Vitanyi. Introduction to Kolmogorov complexity and its applications. Springer Verlag, 1997.