Пусть дана числовая матрица размера $n \times n$ с коэфициентами a_{ij}. Ее перманентом называется сумма по всем перестановкам σ множества $\{1, 2, \dots, n\}$ прозведений

$$a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

(в отличие от определителя матрицы, все произведения берутся со знаком плюс).

Теорема 1. *Задача вычисления перманента булевых матриц #P-полна.*

Доказательство. Принадлежность классу #P очевидна. Докажем, трудность, сведя #P-полную задачу #CNF к задаче о перманенте.

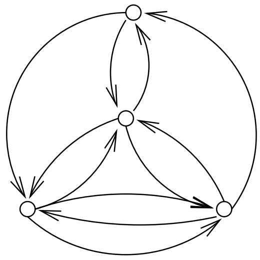
Рассмотрим промежуточную задачу: подсчет количества покрытий графа с симметричными дугами. Эта задача состоит в следующем. Дан конечный ориентированный граф (возможно с петлями), в котором выделено некоторое четное число вершин, причем выделенные вершины разбиты на пары (парные друг другу дуги будем называть симметричными). Покрытием графа называется любое множество дуг такое, что в каждую вершину графа входит ровно одна дуга и выходит ровно одна дуга, и при этом из каждой пары симметричных дуг в покрытие входит ровно одна дуга.

Мы сначала сведем задачу #CNF к подсчету количества покрытий графа с симметричыми дугами, а затем эту задачу сведем к перманенту.

Сведение задачи #CNF к задаче подсчета количества покрытий графа с симметричыми дугами

Пусть дана 3-КНФ $C_1 \wedge \dots \wedge C_m$. Сопоставим ей ориентированный граф с симметричными дугами. Для этого для каждого $i = 1, \dots, m$ заведем специальный граф M_i, с тремя выделенными дугами a, b, c (см. Рис.). Этот граф обладает такими свойствами: (1) у него нет ни одного покрытия, включающего все три дуги a, b, c и (2) для любого собственного подмножества $I \subset \{a, b, c\}$ существует ровно одно покрытие, содержащее все дуги из I и не содержащее ни одной дуги вне I. Выделенные дуги пометим литералами, входящими в C_i. Кроме того, для каждой переменной x заведем граф H_x, который состоит из двух вершин u, v, дуги из u в v и двух ориентированных путей в обратном направлении. Первый из них назовем 0-путем, его длина будет равна количеству вхождений

Рис. 1. Граф M.



литерала $\bar{x}$, если такие вхождения есть, и равна 1 иначе. Второй путь назовем 1-путем, его длина будет равна количеству вхождений литерала x в исходную формулу, если такие вхождения есть, и равна 1 иначе. Добавим по петле в каждую из промежуточных вершин 0- и 1-пути.

Сопоставим выделенными дугам из графов $C_1, \ldots, C_m$, помеченными литералом x дуги 1-пути графа H_x так, чтобы разным дугам были сопоставлены разные. То же самое сделаем для дуг из 0-пути. Объявим сопоставленные друг другу дуги симметричными.

Граф, сопоставленный формуле, состоит из графов $M_1, \ldots, M_m$, соответствующих дизъюнкциям исходной формулы, и графов H_x, соответствующих ее переменным. Эти графы никак не соединены между собой (роль соединения играет отношение симметрии на дугах). Каждому выполняющему присваиванию соответствует следующее покрытие: в каждом графе H_x выбираем дугу из u в v, а также все дуги 0-пути, если $x = 0$, и все дуги 1-пути, если $x = 1$. Кроме того, для промежуточных вершин оставшегося пути из v в u выбираем все петли. Поскольку формула истинна, в каждом графе M_i хотя бы одна из выделенных дуг помечена истинным литералом, а значит существует ровно одно его покрытие, не включающее всех дуг, помеченных истинными литералами, и включающее все дуги, помеченные ложными литералами.

Описанное соответствие между выполняющими присваиваниями формулы и покрытиями графа является взаимно-однозначным (а поэтому количество покрытий построенного графа равно количеству выполняющих наборов формулы). Действительно, пусть дано некоторое покрытие графа. Для каждой переменной x мы обязаны включить в него дугу (u, v). Из v имеется ровно две исходящих дуги (начало 0-пути и начало 1-пути). Выбор одной из этих дуг задает нам набор значений переменных.

Если выбрана дуга из 0-пути, то мы обязаны выбрать и все остальные дуги из 0-пути, и не можем выбрать ни одной дуги из 1-пути. Поэтому в покрытие не входят все дуги графов M_i, помеченные истинными литерала-лама, и входят все выделенные дуги, помеченные ложными литералами. По свойству графа M_i в покрытие не могут входить все выделенные дуги M_i, поэтому хотя бы одна его выделенная дуга помечена истинным литералом.

Нам осталось свести задачу подсчета количества покрытий графа с симметричыми дугами к перманенту. Это сведение опять выполним с помощью промежуточной задачи.

Пусть имеется ориентированный граф с симметричными дугами, каждой дуге которого присвоено целое число, называемое весом. Весом покрытия назовем произведение всех весов входящих в него дуг. Промежуточная задача заключается в подсчете суммы весов всех покрытий графа без симметричных дуг.

Сведение подсчета количества покрытий графа с симметричными дугами к задаче вычисления суммарного веса покрытий графа без симметричных дуг.

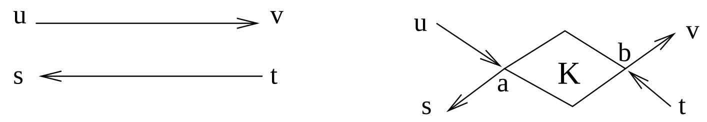
Граф без весов на дугах можно считать частным случаем графа с весами (все веса равны 1). Нам надо избавиться от симметричных дуг ценой введения неединичных весов. Будем избавляться от пар симметричных дуг по очереди.

Пусть дан граф G с симметричными дугами и с произвольными весами на дугах. Мы построим граф, который будет иметь на одну пару симметричных дуг меньше, и общий вес покрытий которого ровно в c раз больше (c — некоторая ненулевая константа).

Для этого выбираем в G любую пару симметричных дуг (u, v) и (s, t), удаляем их и добавляем некоторый вспомогательный граф K с двумя выделенными вершинами $a \neq b$. Затем проводим дуги (u, a) (b, v) (t, b) (a, s). Веса всех добавленных дуг (кроме дуг из графа K) равны 1 (см. рис.).

Граф K будет обладать следующими свойствами:
(а) Общий вес всех покрытий графа K равен нулю.
(б) Общий вес всех покрытий графа $K \setminus \{a\}$ равен нулю (из графа K удаляется вершина a и все инцидентные ей дуги).
(в) Общий вес всех покрытий графа $K \setminus \{b\}$ равен нулю.

Рис. 2. Удаление дуг. Две симметричных дуги заменяются на граф K.



(г) Общий вес всех покрытий графа $K \setminus \{a, b\}$ равен нулю.
(д) Назовем a-b-покрытием K такое множество его дуг, что при добавлении к нему новой дуги из b в a получается покрытие K. Требуется, чтобы суммарный вес всех a-b-покрытий K и суммарный вес всех b-a-покрытий K были равны c.

Мы построим позже такой граф для $c = 4$. А сейчас докажем, что если граф K обладает перечисленными свойствами, то суммарный вес всех покрытий полученного графа H в c раз больше, чем суммарный вес покрытий G.

Классифицируем покрытия графа H следующим образом:
(1) Покрытия, не содержащие ни одной из дуг (u, a), (b, v), (t, b), (a, s).
(2) Покрытия, содержащие дуги (u, a), (a, s) и не содержащие дуг (b, v) и (t, b).
(3) Покрытия, содержащие дуги (t, b), (b, v) и не содержащие дуг (u, a) и (a, s).
(4) Покрытия, содержащие все дуги (u, a), (b, v), (t, b), (a, s).
(5) Покрытия, содержащие дуги (u, a), (b, v) и не содержащие дуг (t, b), (a, s).
(6) Покрытия, содержащие дуги (t, b), (a, s) и не содержащие дуг (u, a) и (b, v).

Докажем, что никаких других покрытий нет. Действительно, любое покрытие разбивается на циклы. Рассмотрим цикл, содержащий вершину a. Этот цикл либо вообще не содержит дуг (u, a) и (a, s) либо содержит ровно одну из них, либо обе. Во втором случае цикл входит в граф K по дуге (u, a) и выходит из него по дуге (b, v) (вариант (5)) или входит в него по дуге (t, b) и выходит по дуге (a, s) (вариант (6)). Первый случай может сочетаться с аналогичным случаем для вершины вершины b (вариант (1)), либо с третьим случаем для вершины b (вариант (3)). Третий случай также дает два варианта — (2) и (4).

Общий вес всех покрытий типа (1) равен нулю. Действительно, каждое такое покрытие распадается на покрытие графа K и покрытие графа G', где G' обозначает граф, полученный из G удалением дуг (u, v) и (s, t). Поэтому покрытия графа H этого типа находятся во взаимно-однозначном соответствии между парами (покрытие K, покрытие G'). При этом вес любого покрытия графа H типа (1) равен произведению весов соответствущей пары покрытий. Поэтому суммарный вес таких покрытий получается перемножением суммарного веса покрытий графа K и суммарного веса покрытий графа G'. По свойству (а) графа K первый сомножитель равен нулю, а значит и произведение равно нулю.

Докажем, что общий вес всех покрытий типа (2) равен нулю. Действительно, каждое такое покрытие распадается на покрытие графа $K \setminus \{a\}$ и покрытие графа $G' \cup \{a\}$ (граф, полученный добавлением к G' вершины a и дуг (u, a), (a, s)). Поэтому суммарный вес таких покрытий получается перемножением суммарных весов покрытий графа $K \setminus \{a\}$ и покрытий графа $G' \cup \{a\}$. По свойству (б) графа K первый сомножитель равен нулю, а значит и произведение равно нулю.

Аналогично доказывается, суммарный вес всех покрытий типов (3) и (4) равен нулю. Для покрытий типа (3) нам нужно свойство (в) графа K, для покрытий типа (4) — свойство (г).

Таким образом, вычисляя суммарный вес всех покрытий графа H, можно учитывать только покрытия типов (5) и (6).

Рассмотрим теперь покрытия типа (5). Покрытия это типа находятся во взаимно-однозначном соответствии между парами (a-b-покрытие K; b-a-покрытие $G' \cup \{a, b\}$). При этом вес покрытия равен произведению весов соответствущей пары покрытий. Следовательно, суммарный вес всех покрытий графа H типа (5) равен произведению суммарного веса всех a-b-покрытий графа K и суммарного веса всех b-a-покрытий графа $G' \cup \{a, b\}$. По свойству (д) графа K первый сомножитель равен c.

Аналогичное верно для всех покрытий типа (6).

Таким образом, суммарный вес всех покрытий H ровно в c раз больше, чем суммарный вес всех b-a-покрытий и a-b-покрытий графа $G' \cup \{a, b\}$. Осталось заметить, что имеется взаимно-однозначное соответствие между покрытиями графа G и b-a- и a-b-покрытиями графа $G' \cup \{a, b\}$. Если в данном покрытии графа G есть дуга (u, v), то при замене ее на дуги (u, a) и (b, v) получается b-a-покрытие графа $G' \cup \{a, b\}$ того же веса. Аналогичным образом из любого покрытия, содержащего дугу (s, t), изготавливается a-b-покрытие графа $G' \cup \{a, b\}$.

Сведение вычисления общего веса покрытий графа без симметричных дуг к задаче о перманенте.

Мы сведем задачу вычисления суммарного веса покрытий графа без симметричных дуг к задаче подсчета количества покрытий графа без кратных дуг. Последняя задача эквивалентна задаче о перманенте. Действительно, каждому такому графу сопоставим булеву матрицу (a_{ij}) размера $n \times n$ (где n количество вершин), где $a_{ij} = 1$ тогда и только тогда, когда имеется дуга из вершины i в вершину j. Перманент этой матрицы равен количеству покрытий графа.

Сделаем небольшое отступление. Описанное соответствие естественным образом продолжается на графы с произвольными весами (но без кратных дуг) и матрицы с произвольными коэффициентами: a_{ij} равно весу дуги из вершины i в вершину j. Перманент этой матрицы будет равен общему весу всех покрытий исходного графа. Говоря языком матриц, мы сведем задачу вычисления перманента произвольной целочисленной матрицы к задаче о вычислении перманента булевой матрицы. (Заметим в скобках, что кратные дуги можно заменить на одну дугу с весом, равным сумме их весов — на суммарный вес покрытий эта замена не повлияет.)

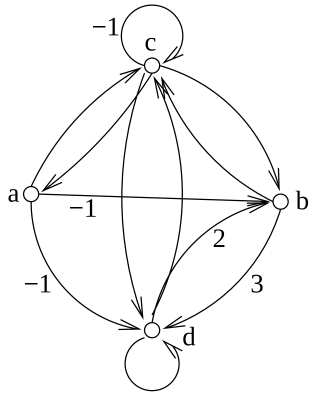
Итак, пусть дан граф с произвольными целыми весами. Сначала сделаем все веса положительными. Для этого заметим, что общий вес покрытий не превосходит $N = n! \times$(произведение модулей всех весов). Число N можно вычислить по исходному графу за полиномиальное время.

Заменим каждый отрицательный вес w на вес $N + w$. Это преобразование изменит общий вес, но не изменит его остатка при делении на N. Поэтому, зная общий вес покрытий полученного графа, мы сможем найти общий вес исходного графа (взяв остаток при делении на N).

Итак, мы можем предполагать, что все веса неотрицательны. Теперь добьемся, чтобы все веса были степенью двойки. Пусть u, v любая пара вершин. Разложим суммарный вес w всех дуг из u в v в сумму степеней двойки: $w = 2^i + 2^j + \dots$, и заменим все их на новые дуги весов $2^i, 2^j, \dots$.

Затем сделаем так, чтобы все веса были равны 1 или 2. Для этого можно заметить, дугу веса ab можно заменить на путь длины 2, в котором первая дуга имеет вес a, вторая вес b и имеется петля в промежуточной вершине пути. Покрытия, не использующие исходной дуги, соответствуют покрытиям, в которых имеется петля на промежуточной вершине. Остальные покрытия соответствуют покрытиям, в которых

Рис. 3. Граф K.



промежуточная вершина проходится по добавленному пути.

Получился граф без кратных дуг с весами 1 и 2. Осталось объяснить, что делать с дугами веса 2. Каждую такую дугу можно заменить на одну дугу (веса 1) и путь длины 2 с петлей в промежуточной вершине.

Осталось предъявить граф K, использованный в доказательстве. Он нарисован на картинке (рис.). Все неуказанные веса в графе K равны 1. Выделенные ребра графа M — три внешних ребра. Графу K соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

В матричных терминах свойства графа K означают следующее: (а) перманент матрицы равен нулю; (б) перманент матрицы без первой строки и первого столбца равен нулю; (в) перманент матрицы без второй строки и второго столбца равен нулю; (г) перманент матрицы без первой и второй строк и первого и второго столбца равен нулю; (д) перманент матрицы без первого столбца и второй строк, а также перманент матрицы без первой строки и второго столбца равны 4.

□