Задачи по курсу ***Коммуникационная сложность*** (осень 2013)

1. Доказать,что детерминированная сложность функции $f : X \times Y \to \{0,1\}$ не превосходит ранга матрицы функции плюс один.

2. Доказать, что $C^R(f) \geq \log|X|$ при условии, что все строки матрицы функции $f : X \times Y \to Z$ различны.

3. Доказать, что для любой функции $f : X \times Y \to \{0,1\}$ недетерминированной коммуникационной сложности не меньше c найдется распределение вероятностей μ на множестве клеток цвета 1 матрицы f, для которого вероятность любого прямоугольника цвета 1 не больше $O(n/2^c)$.

4. Доказать, что если существует коммуникационный протокол с l листьями для вычисления f, то $D(f) \leq 3\log_2 l + O(1)$.

5. Доказать, что для любого распределения вероятностей μ выполнено $\mathrm{disc}_\mu(DISJ_n) = \Omega(1/n)$.

6. Доказать, что $R_0(f) = O(R_0^{pub}(f) + \log n)$ для любой функции f определенной на множестве пар двоичных слов длины n.

7. Доказать, что максимально возможный размер прямоугольника цвета 1 в матрице функции DISJ_n не превосходит 2^n. Вывести отсюда оценки $D(DISJ_n) = \Omega(n)$ и $\log C^1(DISJ) = \Omega(n)$.

8. Докажите, что если многоленточная машина Тьюринга распознает палиндромы (входная лента имеет незаписывающую головку), то общее количество использованных ячеек на рабочих лентах есть $\Omega(\log n)$.

9. Пусть предикат $f(x,y)$ определен на словах длины n и равен 1, если некоторый циклический сдвиг слова x совпадает с y. Докажите, что $D(f) = \Omega(n)$.

10. Докажите, что любая схема для вычисления булевой функции $IP(x,y)$, составленная из элементов $z_1 \wedge \ldots \wedge z_k$, $z_1 \vee \ldots \vee z_k$, $z_1 \oplus \ldots \oplus z_k$ (количество входов не ограничено) и $\neg z$ имеет $\Omega(n)$ элементов.

11. Пусть функция $PROD(x,y)$ определена на n-битовых натуральных числах и выдает в качестве результата средний бит их произведения. Докажите, что $R_{1/3}(PROD) = \Omega(n/\log n)$.