ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ВЫВОД ОСНОВНЫХ СВОЙСТВ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В. А. Успенский

В настоящей заметке мы отправляемся от геометрического определения гармонической функции как такой функции, среднее значение которой по любой окружности равно её значению в центре этой окружности. Из этого определения мы выведем основные свойства гармонических функций, не используя никакого аналитического аппарата.

Среднее значение $M_C[f(z)]$ функции $f(z)$, заданной на окружности C, можно определить формулой

$$M_C[f(z)] = \frac{1}{l}\int\limits_C f(z)\,dz, \tag{1}$$

где l — длина окружности C. В дальнейшем, однако, мы не будем пользоваться этой формулой. Все наши выводы будут основаны только на следующих пяти свойствах среднего значения[1]).

1. $M_C[f(z)] \geqslant 0$, если $f(z) \geqslant 0$.
2. $M_C[f(z)+g(z)] = M_C[f(z)] + M_C[g(z)]$.
3. $M_C[\lambda \cdot f(z)] = \lambda \cdot M_C[f(z)]$.
4. Если на двух конгруентных окружностях C и C_1 заданы соответственно функции $f(z)$ и $f_1(z)$ и эти окружности могут быть наложены одна на другую так, чтобы в совпадающих точках совпали и значения функций (такие функции мы назовём конгруентными), то

$$M_C[f(z)] = M_{C_1}[f_1(z)].$$

5. $M_C[f(z)] \equiv 1$, если $f(z) \equiv 1$.

Из этих основных свойств вытекают ещё три свойства:

A) Если $f(z) \geqslant g(z)$, то $M_C[f(z)] \geqslant M_C[g(z)]$.

B) Если последовательность функций $f_n(z)$ равномерно сходится к $f(z)$, то последовательность $M_C[f_n(z)]$ сходится к $M_C[f(z)]$.

C) Если функция $f(z)$ непрерывна, неотрицательна и не равна тождественно нулю, то $M_C[f(z)] > 0$.

---

[1]) Для класса функций, интегрируемых по Риману, система условий 1 — 5 даёт аксиоматическое определение среднего значения, эквивалентное аналитическому определению, даваемому формулой (1).

Свойство A) вытекает из 1 и 2, свойство B) — из 3, 5 и A). Докажем свойство C). В некоторой точке z_0 $f(z_0) > 0$. Из непрерывности $f(z)$ заключаем, что $f(z) \geqslant \mu > 0$ в некоторой окрестности точки z_0. Отсюда следует, что мы можем построить на C конечное число функций $f_i(z)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, конгруентных $f(z)$, и таких, что в каждой точке окружности по крайней мере для одной из них выполняется неравенство $f_i(z) \geqslant \mu$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(z) \geqslant \mu$ на всей окружности C и

$$M_C\left[\sum_{i=1}^{n} f_i(z)\right] \geqslant M_C[\mu] = M_C[\mu \cdot 1] = \mu \cdot M_C[1] = \mu \cdot 1 = \mu > 0.$$

Поскольку

$$M_C\left[\sum_{i=1}^{n} f_i(z)\right] = \sum_{i=1}^{n} M_C[f_i(z)] = n \cdot M_C[f(z)],$$

то $M_C[f(z)] > 0$.

Непрерывная функция, заданная в некоторой области плоскости, называется гармонической, если её среднее значение по любой окружности равно значению в центре этой окружности (предполагается, что и сама окружность, и центр её лежат в области задания; только такие окружности и рассматриваются). Иногда, рассматривая гармоническую функцию в замкнутой области, мы будем разрешать ей иметь конечное число точек разрыва на границе. Из определения гармонической функции и свойств среднего значения следует, что сумма и разность гармонических функций, произведение гармонической функции на действительное число и предел равномерно сходящейся последовательности гармонических функций снова являются гармоническими функциями. Любая постоянная также является гармонической функцией.

Рассмотрим теперь один важный пример гармонической функции. Выбрав произвольно на плоскости отрезок AB, положим $H_{AB}(z) = \angle AzB$[1]) (рис. 1). Функция $H_{AB}(z)$ непрерывна на всей плоскости за исключением двух полупрямых, исходящих из точек A и B (см. рис. 1). Покажем, что $H_{AB}(z)$ — гармоническая функция. Возьмём произвольную окружность C с центром в O (рис. 2). Нам нужно доказать, что

$$M_C[H_{AB}(z)] = H_{AB}(O),$$

$$\begin{aligned}
M_C[H_{AB}(z)] - H_{AB}(O) &= M_C[H_{AB}(z)] - M_C[H_{AB}(O)] = \\
= M_C[H_{AB}(z) - H_{AB}(O)] &= M_C[\angle AzB - \angle AOB] = M_C[\angle OBz - \angle OAz] = \\
&= M_C[\angle OBz] - M_C[\angle OAz].
\end{aligned}$$

Функции $\varphi(z) = \angle OAz$ и $2\pi - \varphi(z)$ конгруентны, так как для любых двух точек z_1 и z_2, симметричных относительно диаметра KL, $\varphi(z_1) = 2\pi - \varphi(z_2)$.

[1]) Под углом AzB понимается наименьший угол, при повороте на который в направлении против часовой стрелки луч zA совмещается с лучом zB. Таким образом, всегда выполнено неравенство $0 \leqslant \angle AzB < 2\pi$.

Поэтому $M_C[\varphi(z)] = M_C[2\pi - \varphi(z)] = 2\pi - M_C[\varphi(z)]$, откуда $M_C[\varphi(z)] = \pi$. Точно так же $M_C[\angle OBz] = \pi$,

$$M_C[\angle OBz] - M_C[\angle OAz] = 0 \text{ и } M_C[H_{AB}(z)] = H_{AB}(O).$$

Каждому отрезку AB, таким образом, соответствует своя гармоническая функция $H_{AB}(z)$. Под символом $H_{\infty\infty}(z)$ будем понимать функцию, равную тождественно 2π. Естественность такого обозначения оправдывается тем, что $H_{AB}(z_0)$ стремится к 2π при удалении отрезка AB от точки z_0 в бесконечность в направлении, указанном на рис. 3. В дальнейшем для произвольной гармонической функции, заданной на круге, будет дано представление её через функции $H_{AB}(z)$.

Прежде всего, докажем следующую теорему.

Теорема о максимуме. *Гармоническая функция, заданная на круге* [1]), *достигает своего максимума и минимума на границе этого круга.*

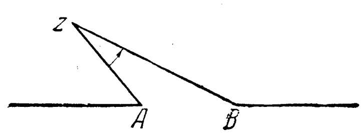

Рис. 1.

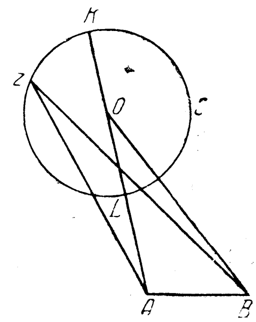

Рис. 2.

Доказательство. Пусть функция $f(z)$, заданная на круге S, ограниченном окружностью C (рис. 4), достигает максимума в некоторой точке a внутри круга. Проведём окружность C' с центром в a и касающуюся C в некоторой точке b. Так как $f(a) = \max_{z \in S} f(z)$, то $f(z) \leqslant f(a)$ $(z \in C')$. Покажем, что для всех $z \in C'$ $f(z) = f(a)$. Пусть это не так, тогда функция $f(a) - f(z)$ на окружности C' непрерывна, неотрицательна, и не равна тождественно нулю; в силу свойства С) $M_{C'}[f(a) - f(z)] > 0$. В то же время $M_{C'}[f(a) - f(z)] = M_{C'}[f(a)] - M_{C'}[f(z)] = f(a) - M_{C'}[f(z)]$, откуда $f(a) > M_{C'}[f(z)]$; но это противоречит определению гармонической функции, следовательно, для всех $z \in C'$ $f(z) = f(a)$, в частности $f(b) = f(a)$, чем всё и доказано: $f(z)$ достигает максимума в точке $b \in C$. Совершенно аналогично доказывается и утверждение о минимуме [2]).

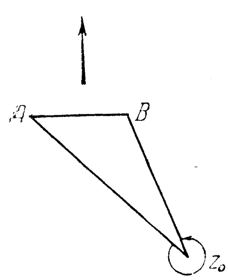

Рис. 3.

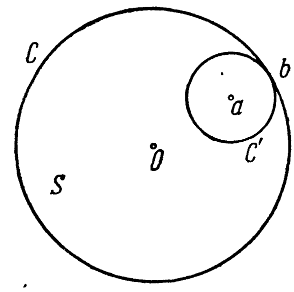

Рис. 4.

---

[1]) Под словом «круг» мы будем понимать замкнутый круг, т. е. круг вместе с ограничивающей его окружностью.

[2]) Мы провели доказательство в предположении, что $f(z)$ непрерывна на круге S. Нетрудно перенести это доказательство на случай, когда $f(z)$ имеет конечное число разрывов. Для этого достаточно провести две вспомогательные окружности, не проходящие ни через одну из точек разрыва: C' с центром в a и C'' с центром в некоторой точке $c \in C'$ и касающуюся C.

Следствие 1. Две гармонические функции, совпадающие на окружности C, совпадают и внутри круга S, ограниченного этой окружностью.

Действительно, разность этих функций тождественно равно нулю на окружности C и по теореме о максимуме равна нулю и внутри круга S.

Следствие 2. Последовательность гармонических функций $f_n(z)$, равномерно сходящаяся на окружности C, сходится равномерно и внутри круга S, ограниченного этой окружностью.

В самом деле, для достаточно больших n

$$\max_{z \in C} |f_n(z) - f_{n+p}(z)| < \varepsilon \quad (p = 1, 2, 3, \ldots).$$

Отсюда по теореме о максимуме $\max\limits_{z \in S} |f_n(z) - f_{n+p}(z)| < \varepsilon$ и в силу критерия Коши последовательность $f_n(z)$ равномерно сходится на всём круге.

Пусть S — некоторый круг. Рассмотрим всевозможные функции $H_{AB}(z)$, непрерывные внутри круга S, а также любые их линейные комбинации и пределы равномерно сходящихся последовательностей этих линейных комбинаций. Все полученные таким способом функции будут гармоническими. Множество их обозначим через $\mathfrak{M}$. Наша задача—показать, что $\mathfrak{M}$ содержит все функции, гармонические на S. В силу следствия 1 всякая гармоническая функция $f(z)$ на круге S однозначно определяется своими значениями на границе C этого круга. Поэтому нам достаточно установить, что, какова бы ни была непрерывная функция $g(z)$ на окружности C, среди функций класса $\mathfrak{M}$ найдётся функция, совпадающая на C с функцией $g(z)$. Доказательством этого мы сейчас и займёмся.

Назовём функцию $f(z)$, заданную на окружности C, ступенчатой, если эту окружность можно разбить на конечное число дуг так, чтобы $f(z)$ была постоянна внутри каждой дуги. Постараемся для любой ступенчатой функции $f(z)$ построить гармоническую функцию $F(z)$, заданную на круге S и совпадающую на C с $f(z)$.

Решим, прежде всего, эту задачу для простейшей ступенчатой функции, состоящей из одной ступеньки, т. е. функции $\varphi(z)$, определённой формулой

$$\varphi(z) = \begin{cases} \mu & \text{для } z \in AB, \\ 0 & \text{для } z \in BA\,^{1)}. \end{cases}$$

Построим $H_{AB}(z)$; легко видеть, что $H_{AB}(z)$ постоянна как на дуге AB, так и на дополнительной дуге BA. Пусть $H_{AB}(z) = \alpha$ при $z \in AB$ и $H_{AB}(z) = \beta$ при $z \in BA$. Тогда гармоническая функция

$$\Phi(z) = \frac{\mu}{\alpha - \beta}[H_{AB}(z) - \beta] = \frac{\mu}{\alpha - \beta} H_{AB}(z) - \frac{\mu}{\alpha - \beta} \cdot \frac{\beta}{2\pi} H_{\infty\infty}(z)$$

совпадает на окружности C с $\varphi(z)$.

Любая ступенчатая функция $f(z)$ представима в виде суммы отдельных ступенек $\varphi(z)$; построив для каждой из этих ступенек свою $\Phi(z)$,

---

[1]) Мы предполагаем, что окружность C ориентирована, и обозначаем дугу, ставя её концы в порядке, совпадающем с направлением ориентации.

мы получим искомую функцию $F(z)$ как сумму функций $\Phi(z)$, т. е. как некоторую линейную комбинацию функций $H_{AB}(z)$.

Пусть теперь $f(z)$ — произвольная непрерывная функция на окружности C. Тогда мы можем разбить окружность на столь малые дуги, чтобы колебание $f(z)$ на каждой из этих дуг было меньше ε. Построим ступенчатую функцию, положив её внутри каждой дуги разбиения постоянной и равной какому-нибудь значению $f(z)$ на этой дуге. Построенная ступенчатая функция отличается от $f(z)$ во всех точках меньше, чем на ε. Отсюда следует, что мы можем представить $f(z)$ в виде предела равномерно сходящейся последовательности ступенчатых функций $f_n(z)$. Построим для каждой $f_n(z)$ соответствующую гармоническую $F_n(z)$. По следствию 2 из теоремы о максимуме последовательность $F_n(z)$ равномерно сходится на всём круге. Каждая функция $F_n(z)$ непрерывна на всём круге за исключением точек разбиения, т. е. концов дуг разбиения. Но мы можем разбивать окружность так, чтобы точки разбиения каждой функции $f_n(z)$ не совпадали с точками разбиения остальных функций. Поэтому в каждой точке круга все функции $F_n(z)$, по крайней мере с некоторого момента, непрерывны, следовательно, предельная функция $F(z)$, совпадающая на C с $f(z)$, непрерывна на всём круге S.

Нами доказана, таким образом, следующая

Теорема. *Любая гармоническая функция, заданная на круге, может быть получена как предел равномерно сходящейся последовательности линейных комбинаций* $H_{AB}(z)$.

Вместе с тем мы решили задачу Дирихле для круга, т. е. показали, что любую функцию, непрерывную на окружности, можно распространить гармонически внутрь круга и притом единственным образом.